С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие содержит задачи, предназначенные для практических занятий по курсу "Математические основы теории систем". За основу взята рабочая программа курса, который читается студентам специальности "Автоматика и управление в технических системах". Ему предшествуют курсы "Основы дискретной математики", "Высшая математика", "Вычислительные методы и программирование". В пособие включены задачи по анализу транспортных сетей и сетей Петри, исследованию характеристик периодических, непериодических и случайных сигналов, решению дифференциальных уравнений,описывающих линейные системы автоматического управления и представленных в параметрах пространства состояний. Значительную часть пособия составляют экстремальные задачи. Их решение позволяет освоить алгоритмы соответствующих методов и приобрести необходимые вычислительные навыки. Из-за простоты предлагаемых задач предполагается ручная реализация алгоритмов, что позволит лучше прочувствовать тонкости различных методов.

Курсовая работа включает в себя выполнение нескольких заданий, соответствующих изучаемым разделам. Задания предусматривают получение аналитического решения задач, выбор эффективных методов их решения, в тех случаях, где это необходимо, использование нескольких методов решения и их сравнительную оценку.

Курсовая работа оформляется в виде расчетно-пояснительной записки на листах 11 формата. Содержание записки определяется основными пунктами задания, уточненными применительно к конкретному варианту. Решение каждой задачи должно поясняться, должны быть ссылки на использованное правило, теорему и т.д. Графические материалы выполняются на отдельных листах и подшиваются в расчетно-пояснительную записку.

1. ТРАНСПОРТНЫЕ СЕТИ. СЕТИ ПЕТРИ

1.1. Задача о максимальном потоке и потоке минимальной стоимости

На каждом из рис. 1.1-1.22 приведена транспортная сеть в виде неориентированного графа, отвечающего симметричному ориентированному графу (т.е. каждому ребру неориентированного графа соответствуют две противоположно направленные дуги транспортной сети). На ребрах через запятую проставлены значения пропускной способности $C(\nu)$ ребра ν и стоимости транспортировки единицы потока $d(\nu)$ по ребру.

Для заданной сети:

1. Определить максимальный поток φ_{max} транспортировки груза между указанной парой вершин, считая одну из них источником, а другую стоком.

2. Определить стоимость доставки груза по путям, формирующим максимальный поток в сети.

3. Найти поток из источника в сток заданной величины $\varphi < \varphi_{max}$, обладающий минимальной стоимостью.

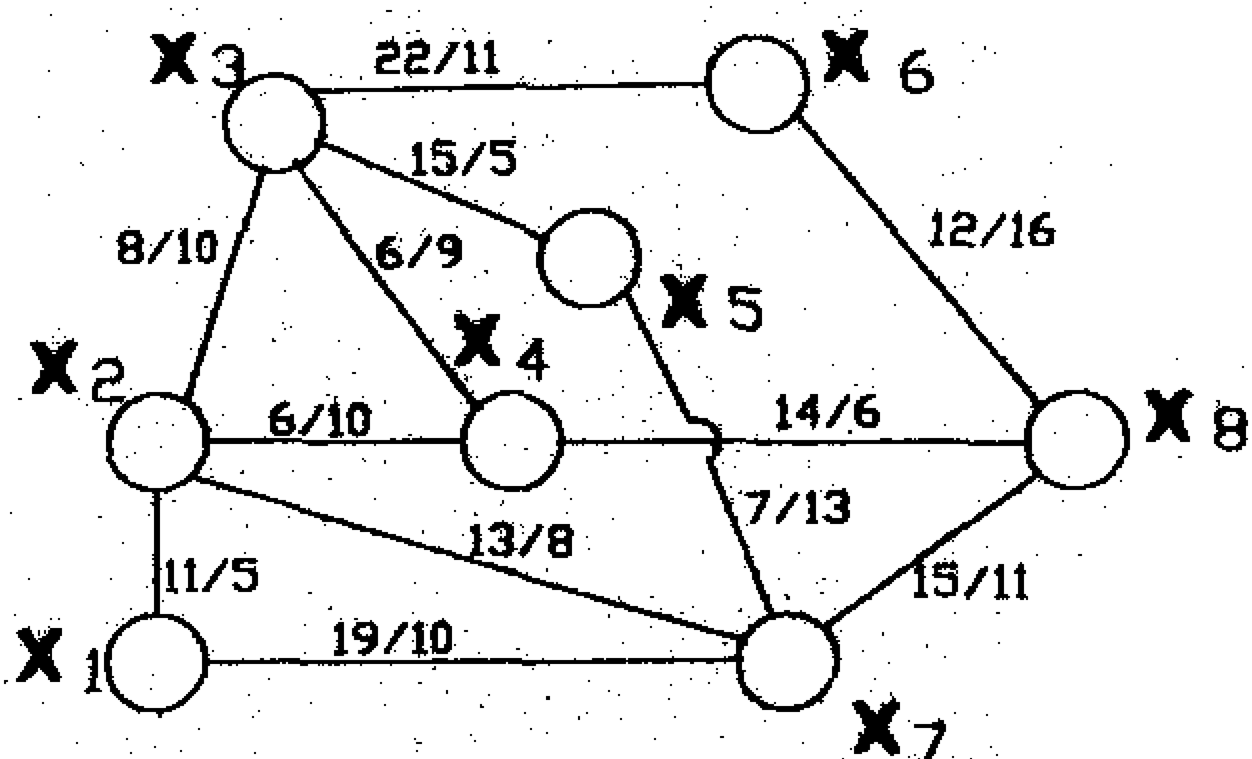


Рис. 1.1

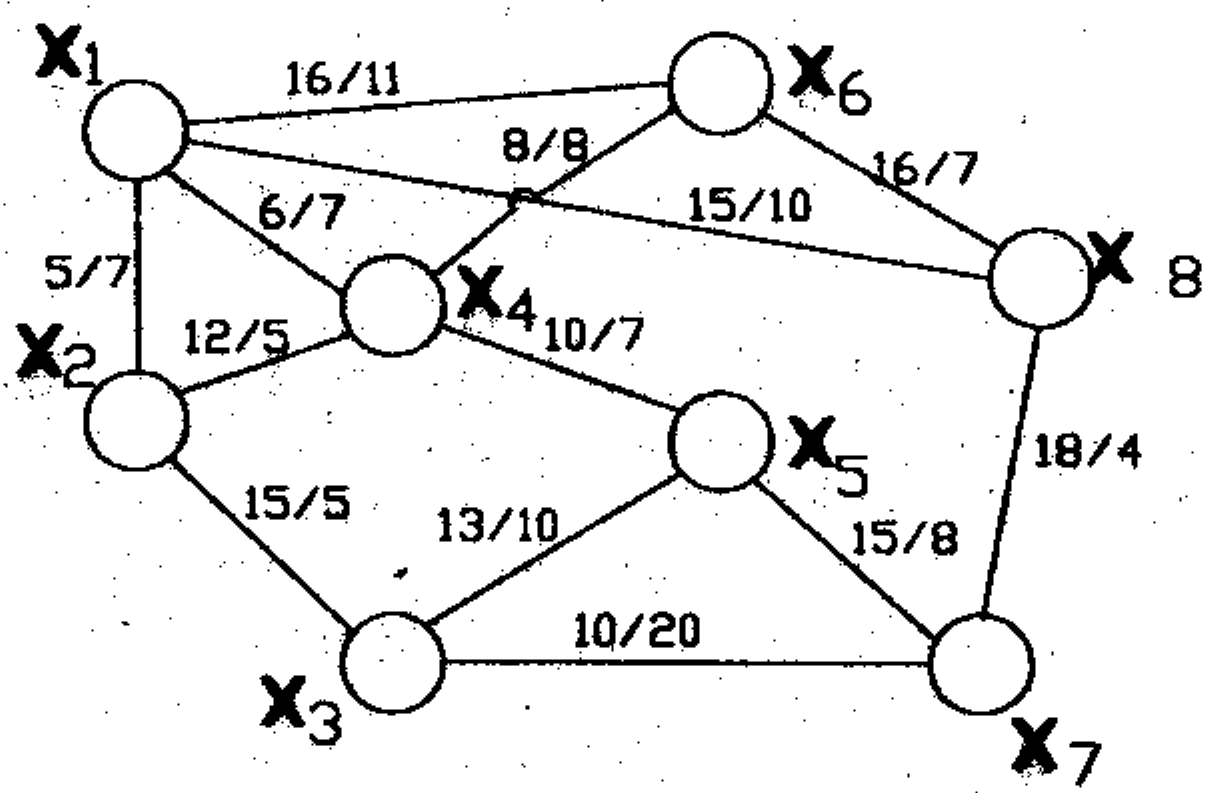

X1
X2
X3
X4
X5
X6
X7
X8
16/11
8/8
16/7
6/7
15/10
5/7
12/5
10/7
18/4
15/5
13/10
15/8
10/20

Рис. 1.2

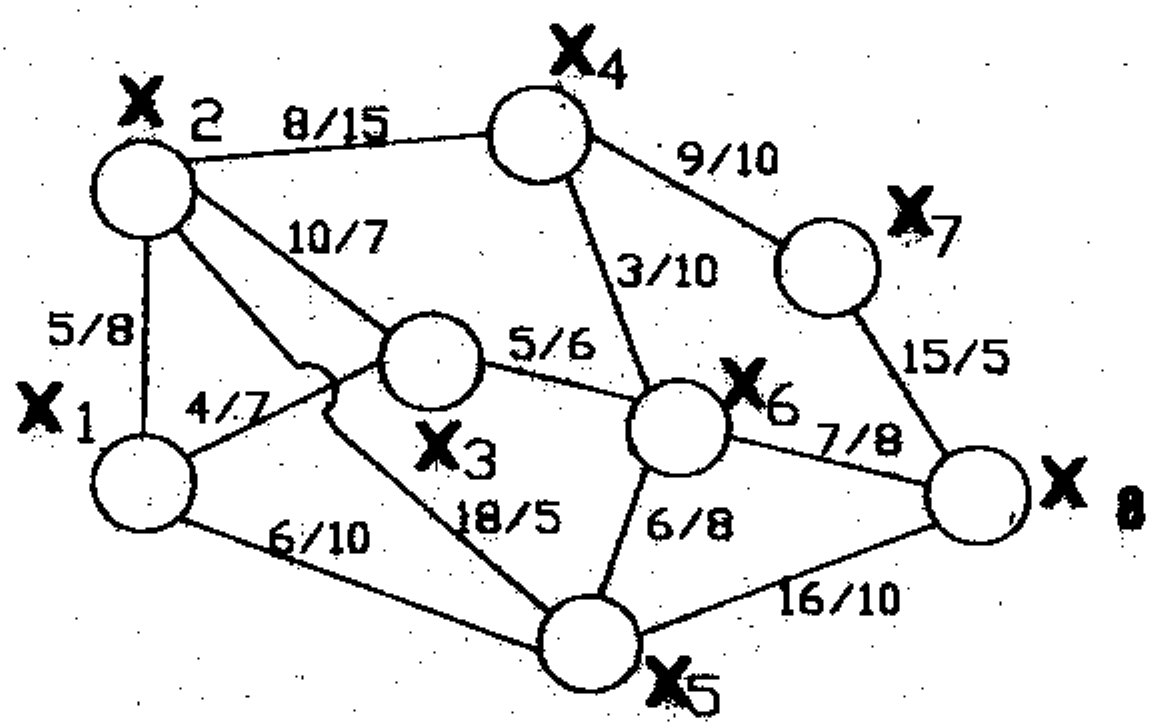
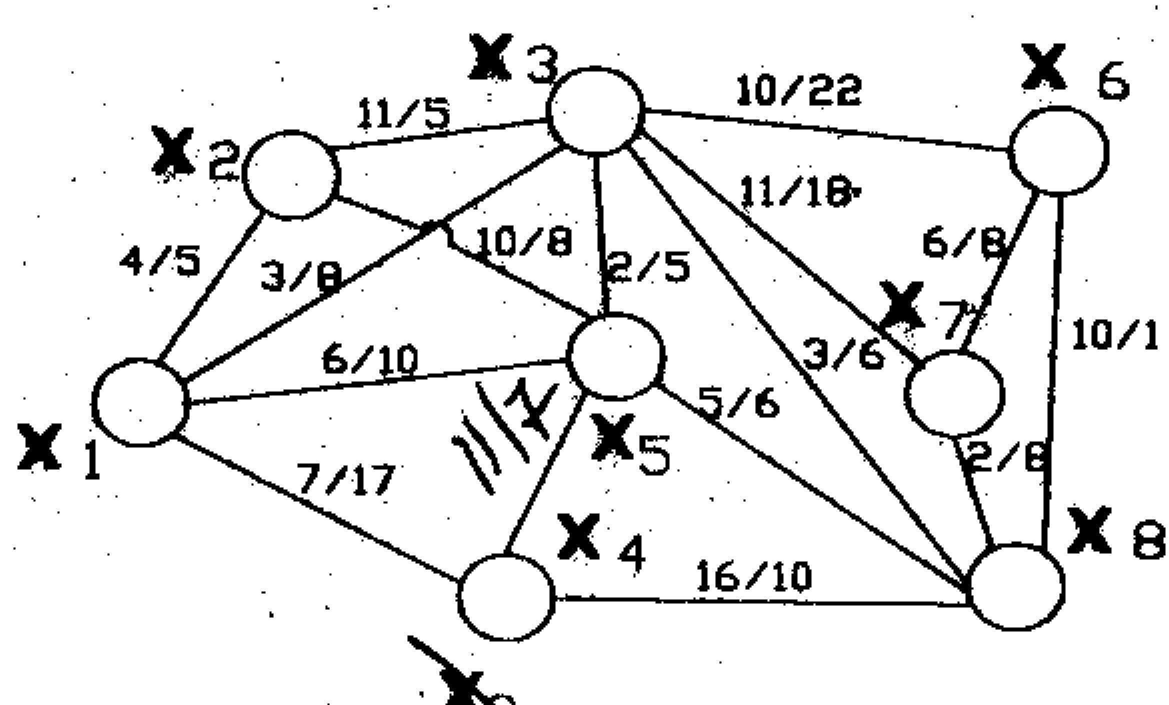

X2
X4
X7
X1
X3
X6
X8
X5
8/15
9/10
10/7
3/10
5/8
5/6
15/5
4/7
7/8
18/5
6/10
6/8
16/10

Рис. 1.3


X3
X2
X6
X1
X5
X7
X4
X8
11/5
10/22
11/18
4/5
3/8
10/8
2/5
6/8
10/1
6/10
3/6
5/6
2/8
7/17
16/10

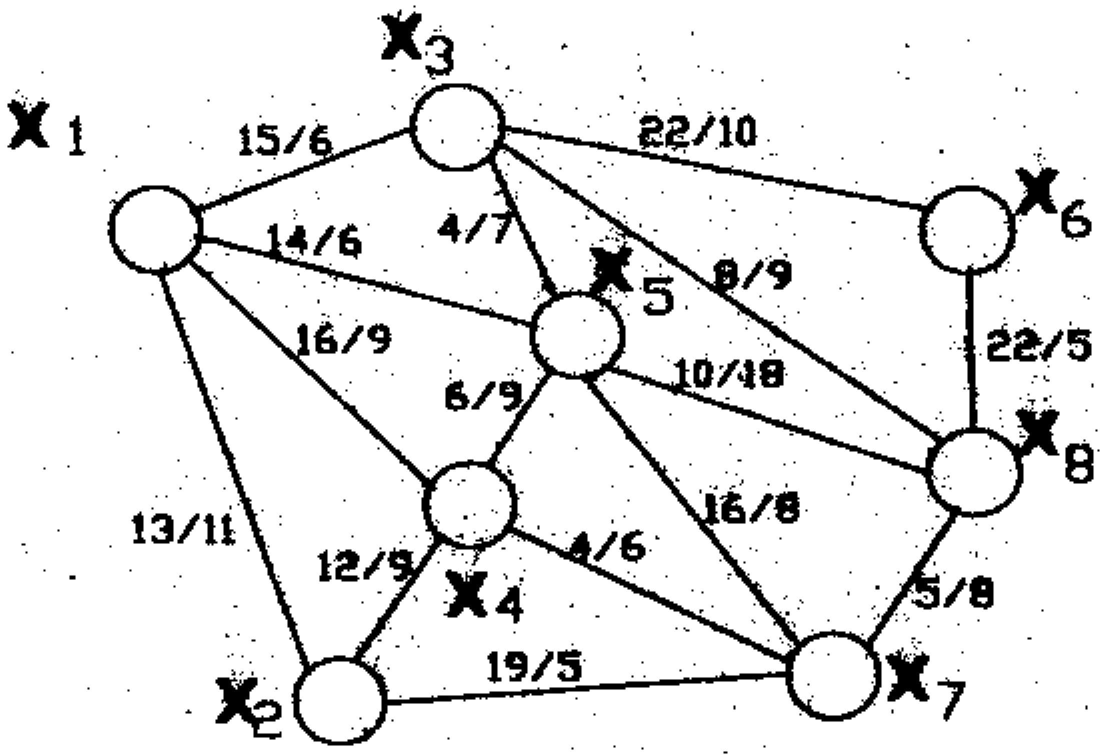


Рис. 1.5

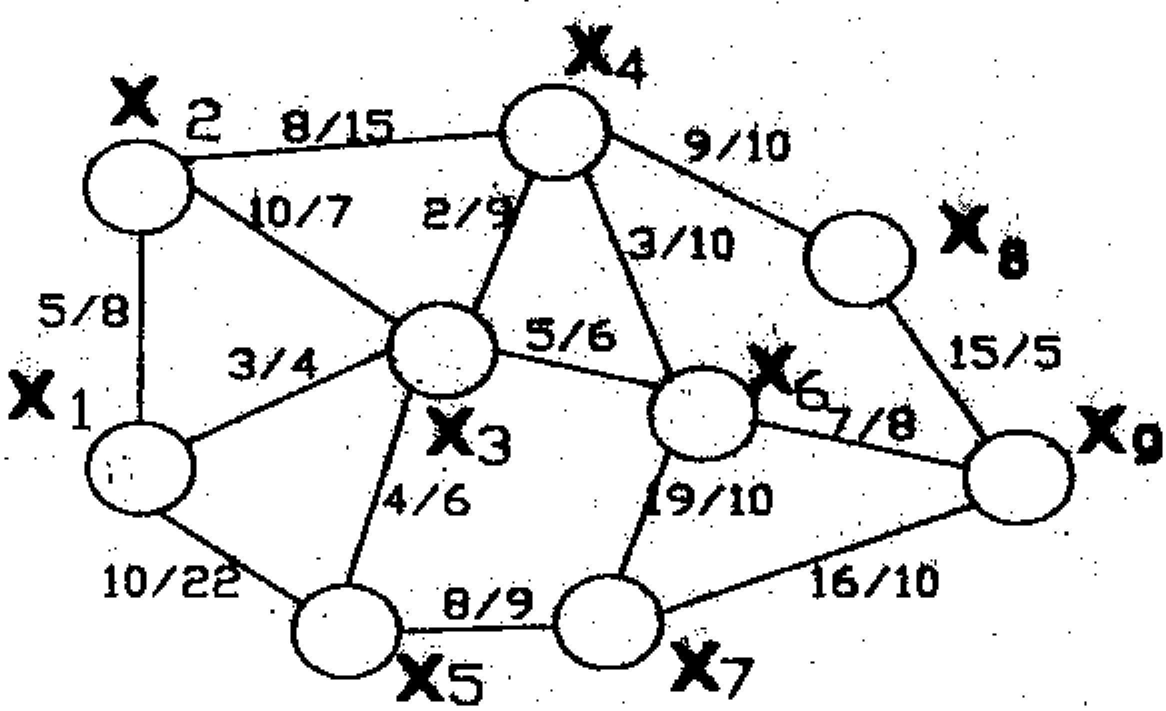


Рис. 1.6

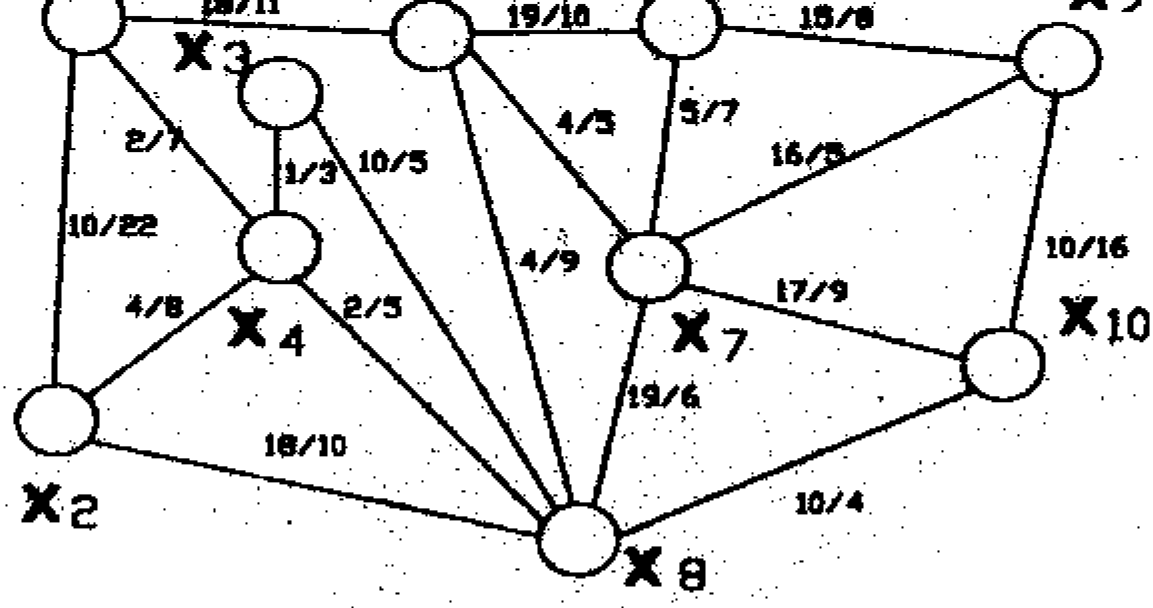


Рис. 1.7

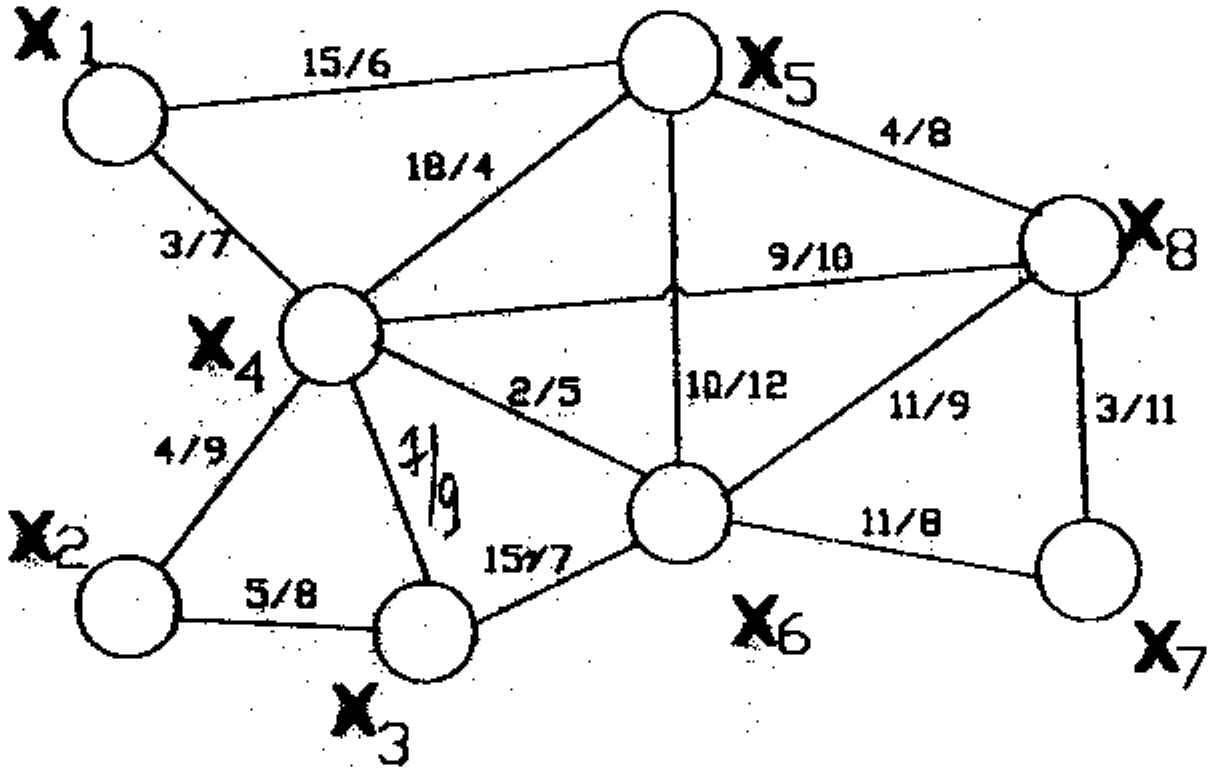


Рис. 1.8

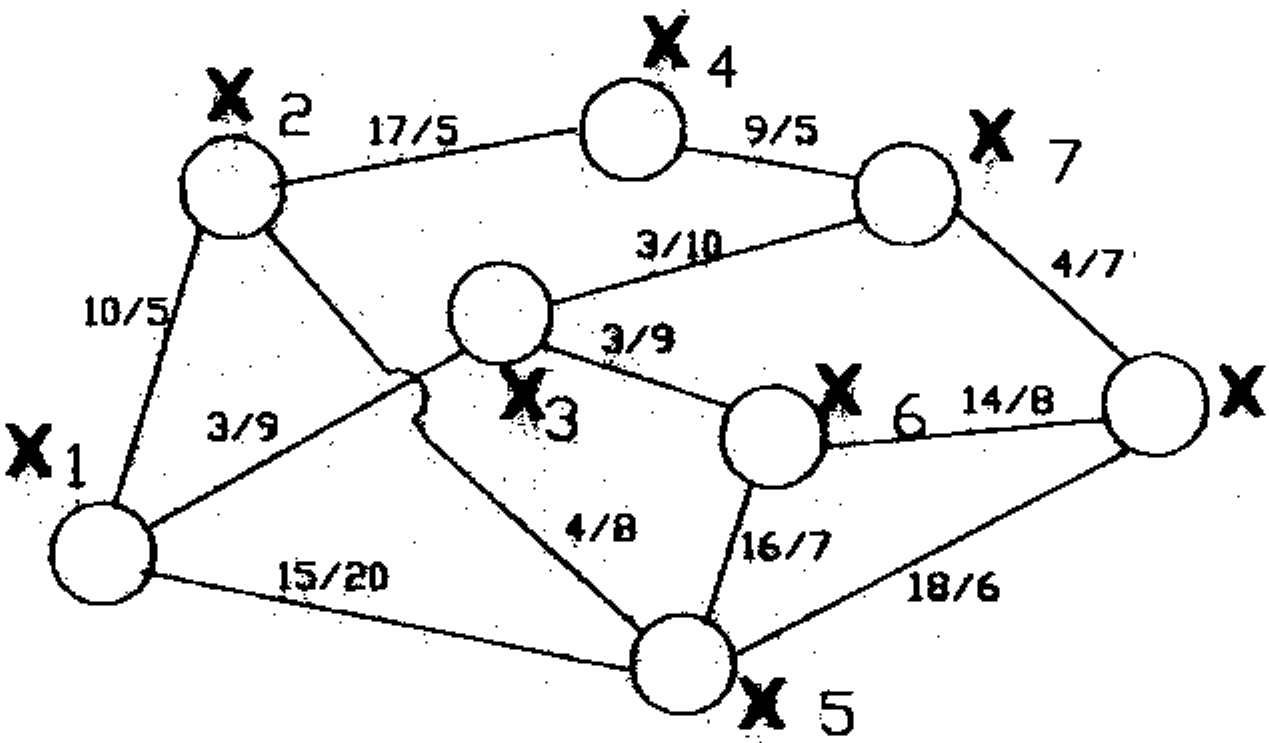


Рис. 1.9

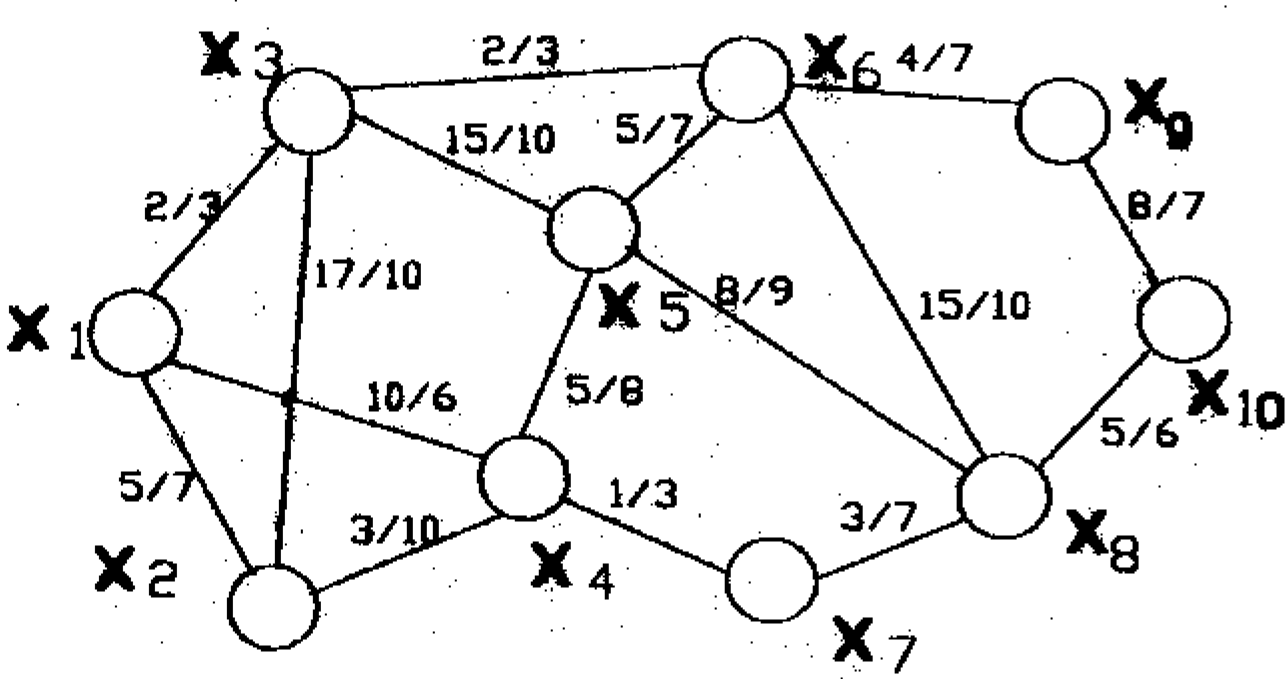


Рис. 1.10

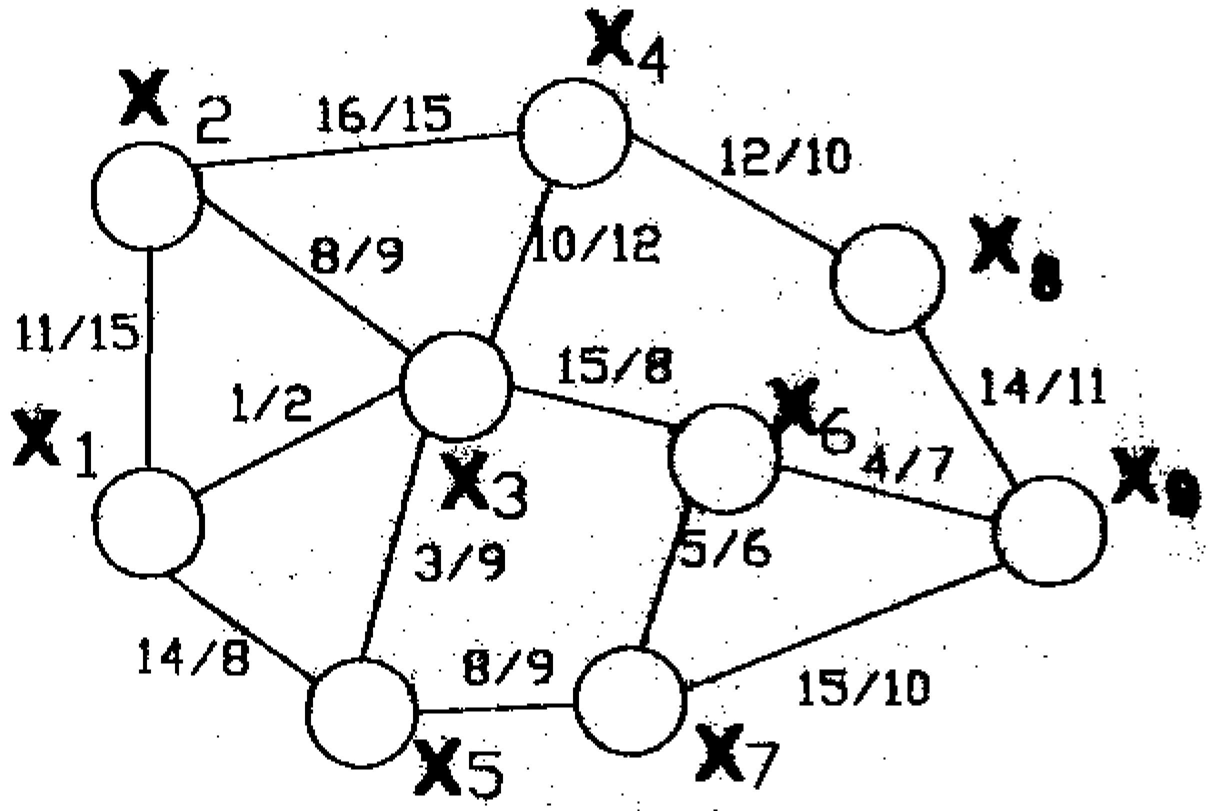


Рис. 1.11

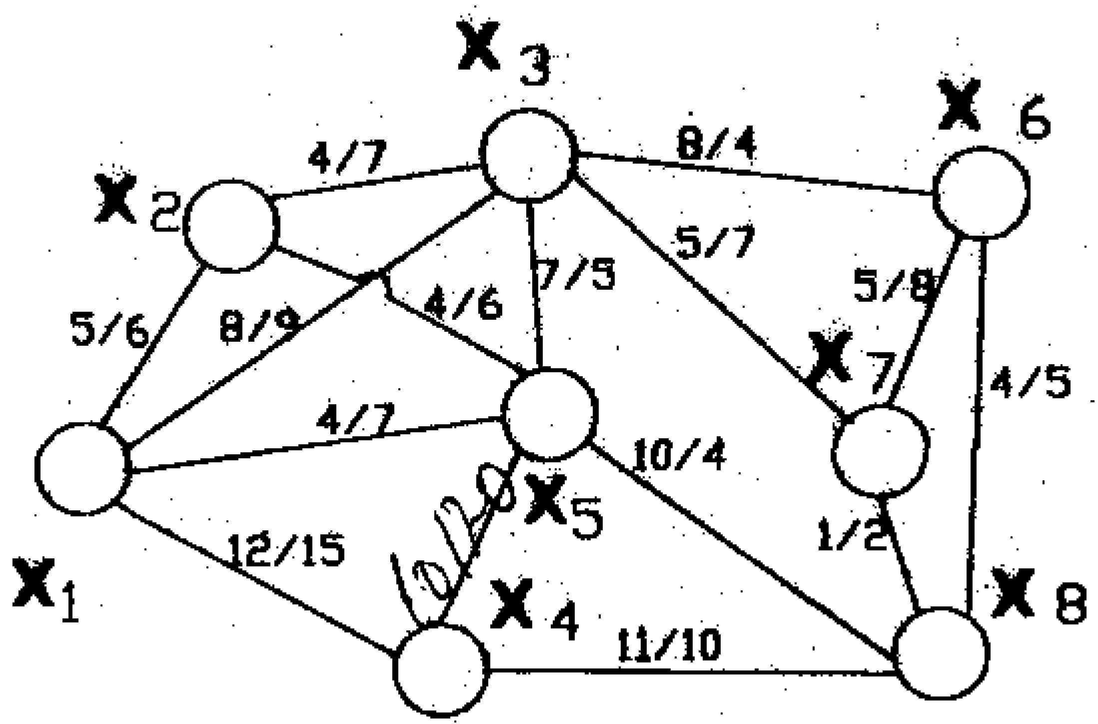


Рис. 1.12

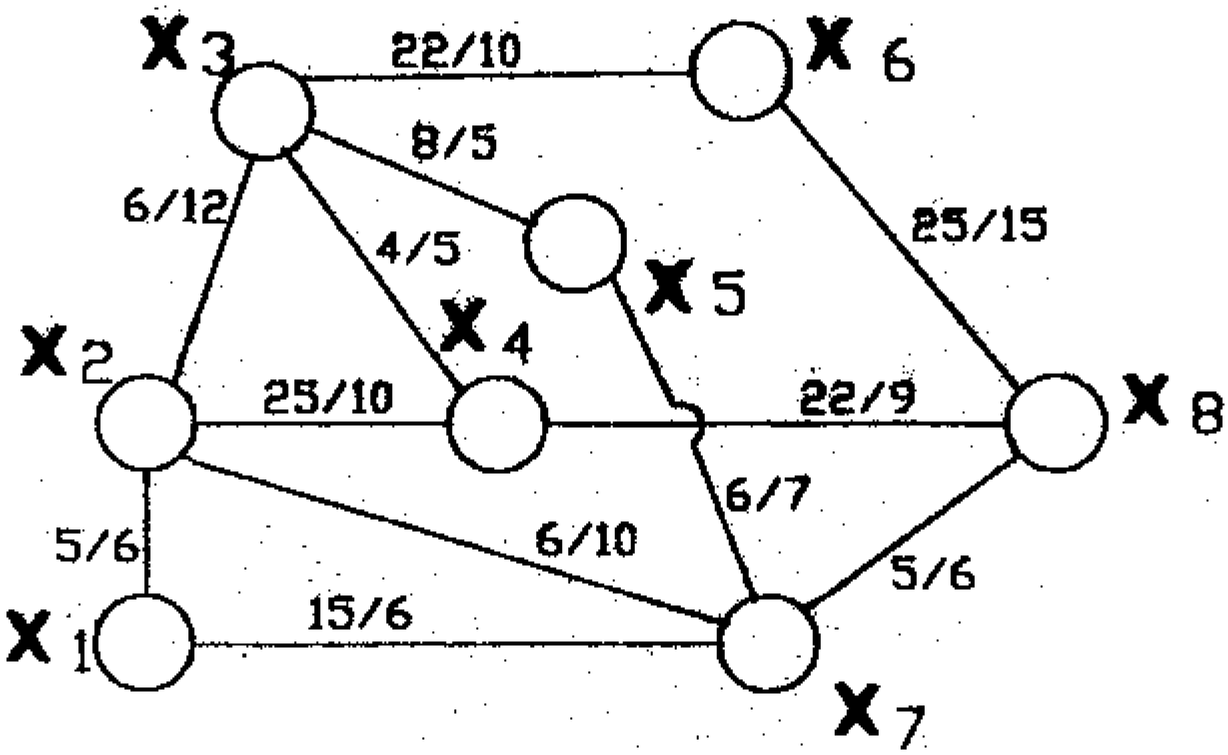


Рис. 1.13

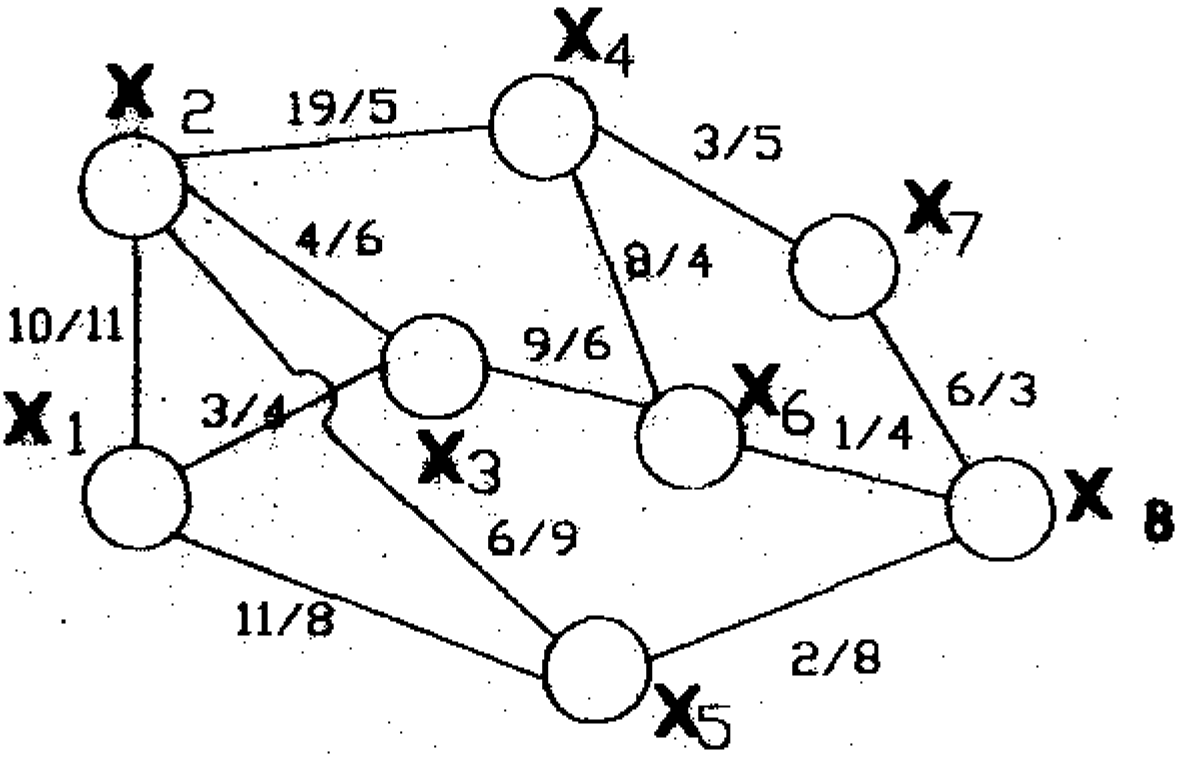


Рис. 1.14

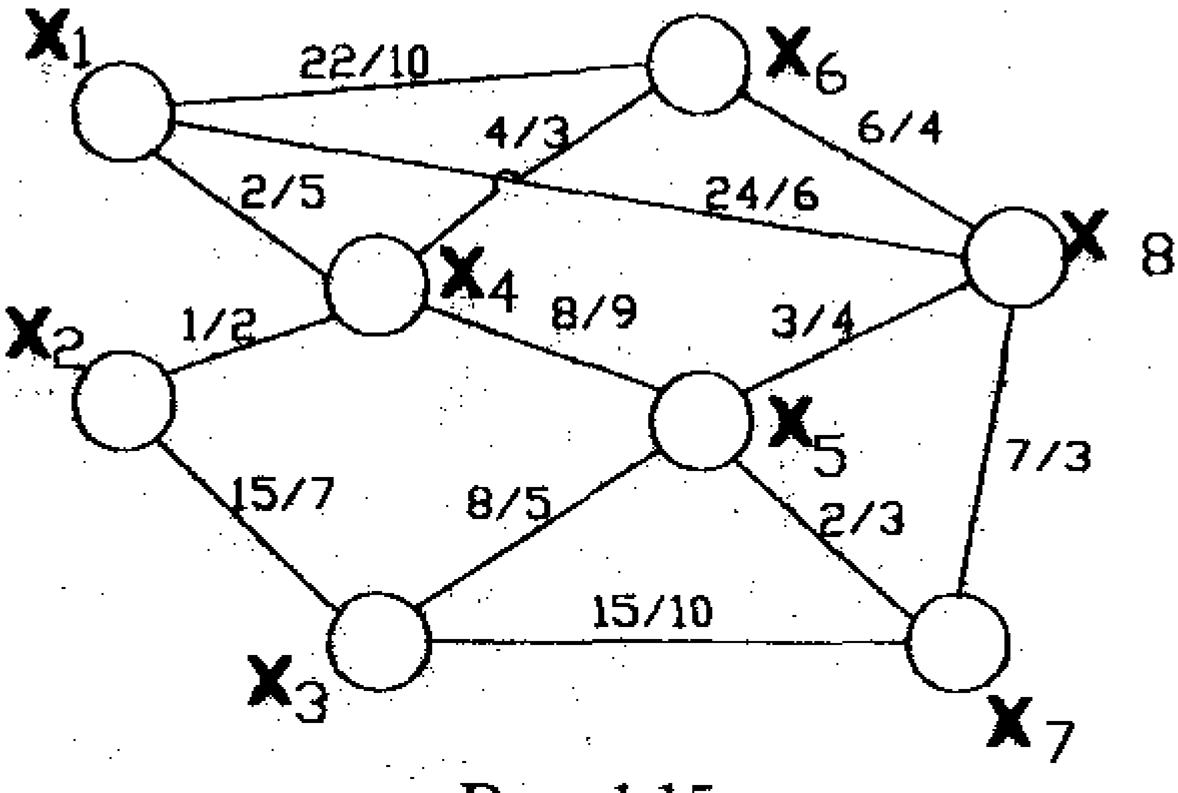


Рис. 1.15

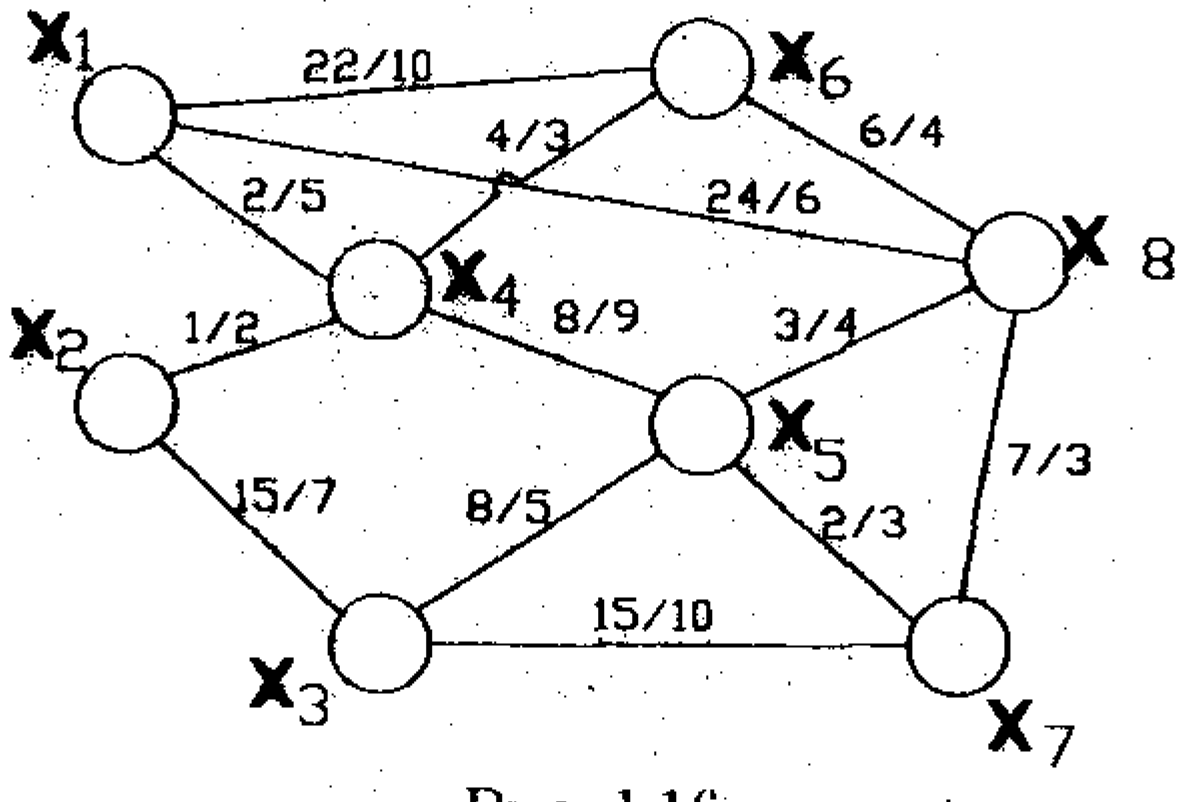


Рис. 1.16

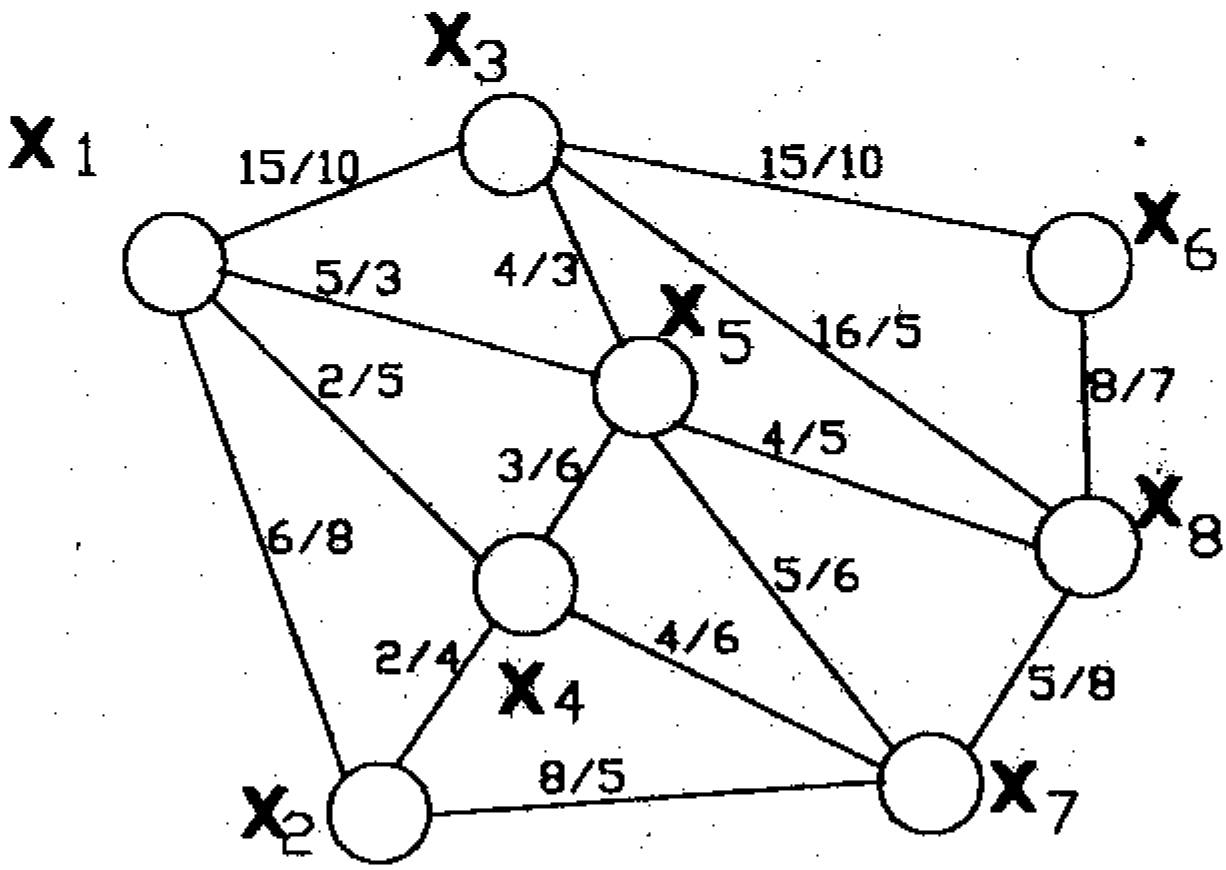


Рис. 1.17

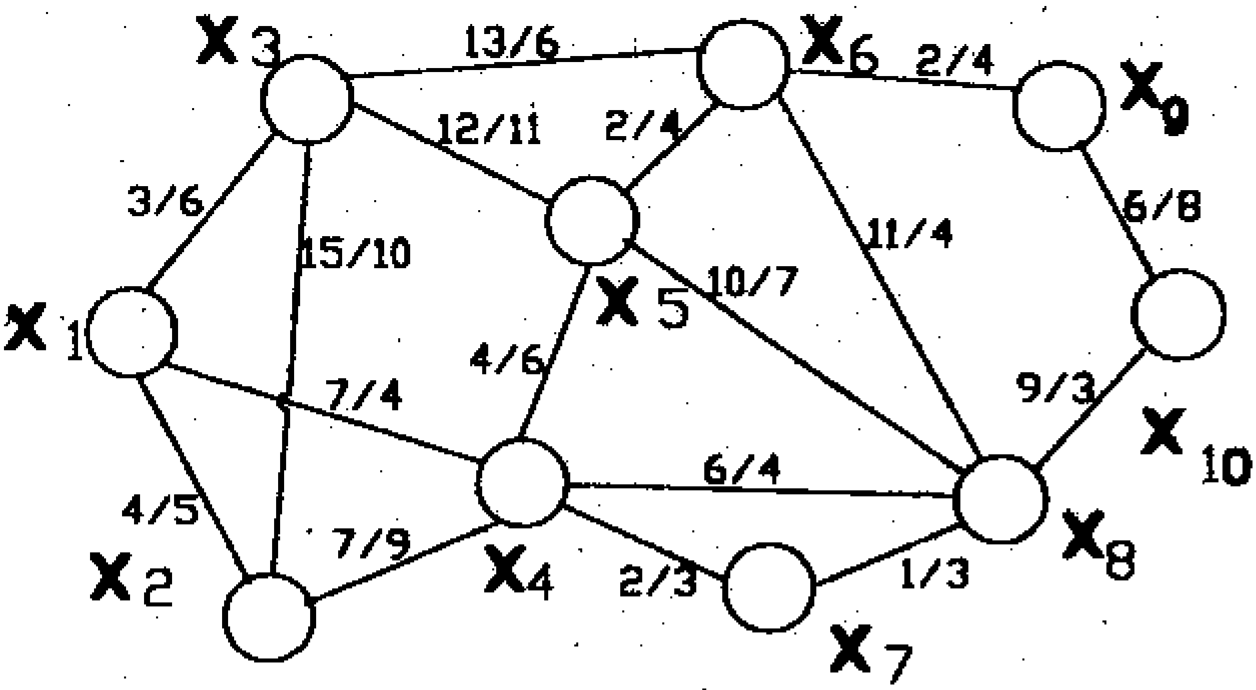


Рис. 1.18

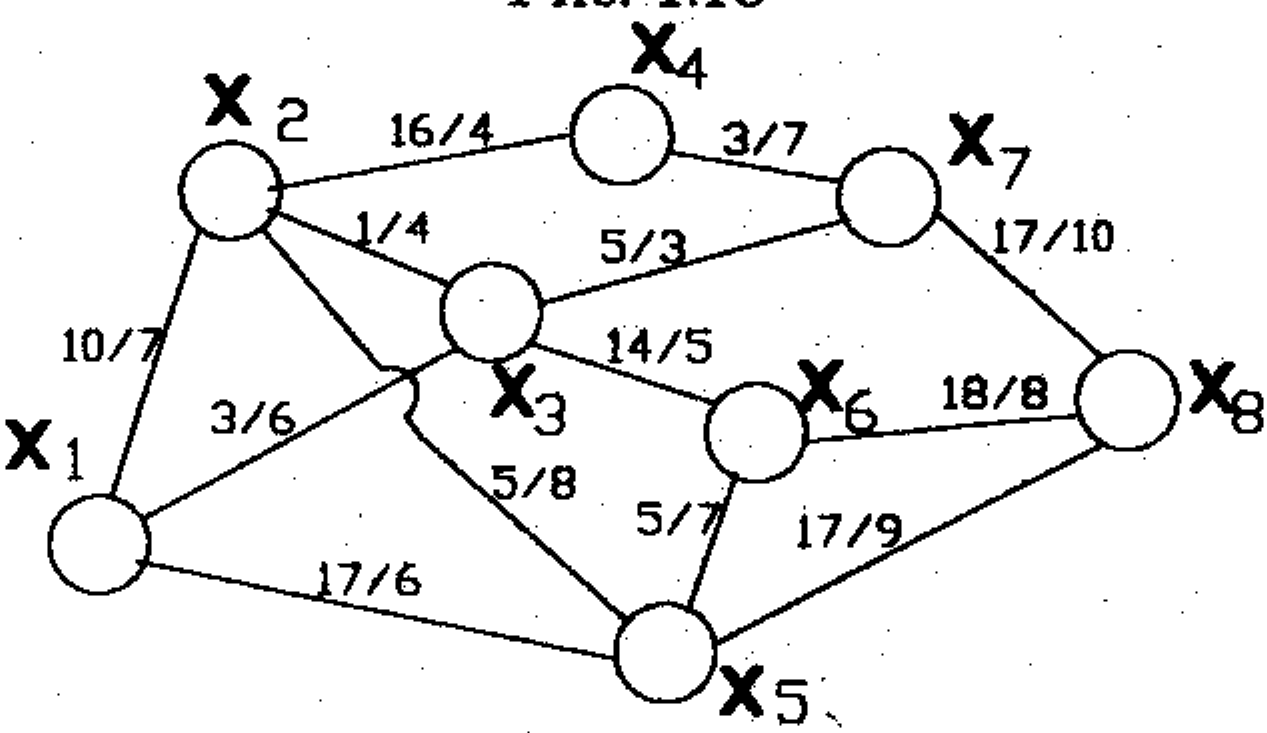


Рис. 1.19

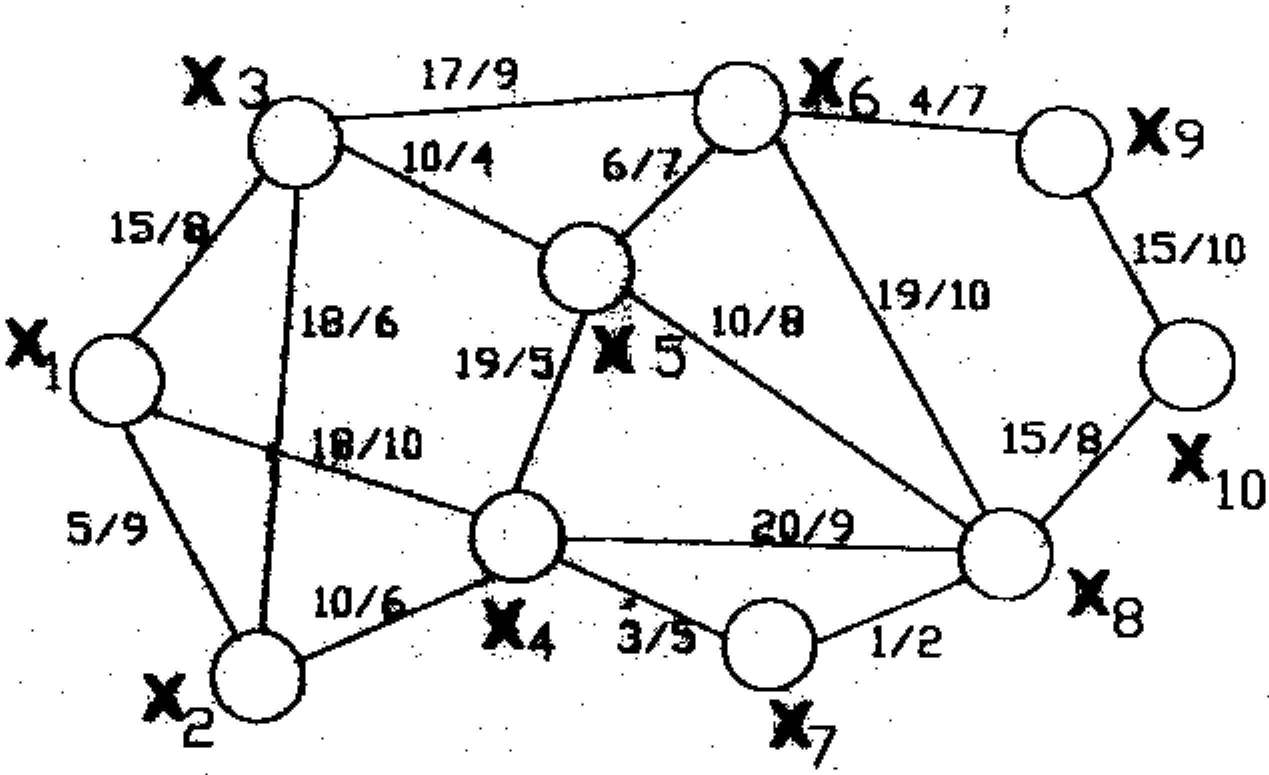


Рис. 1.20

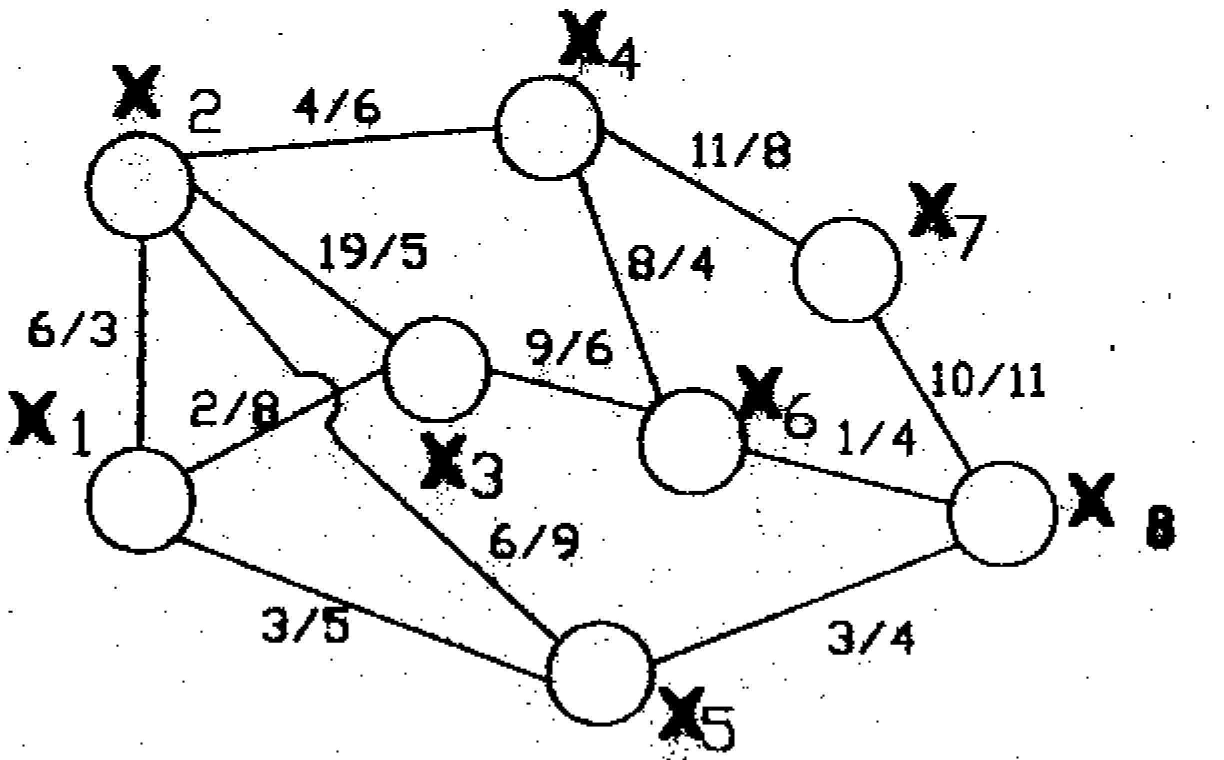


Рис. 1.21

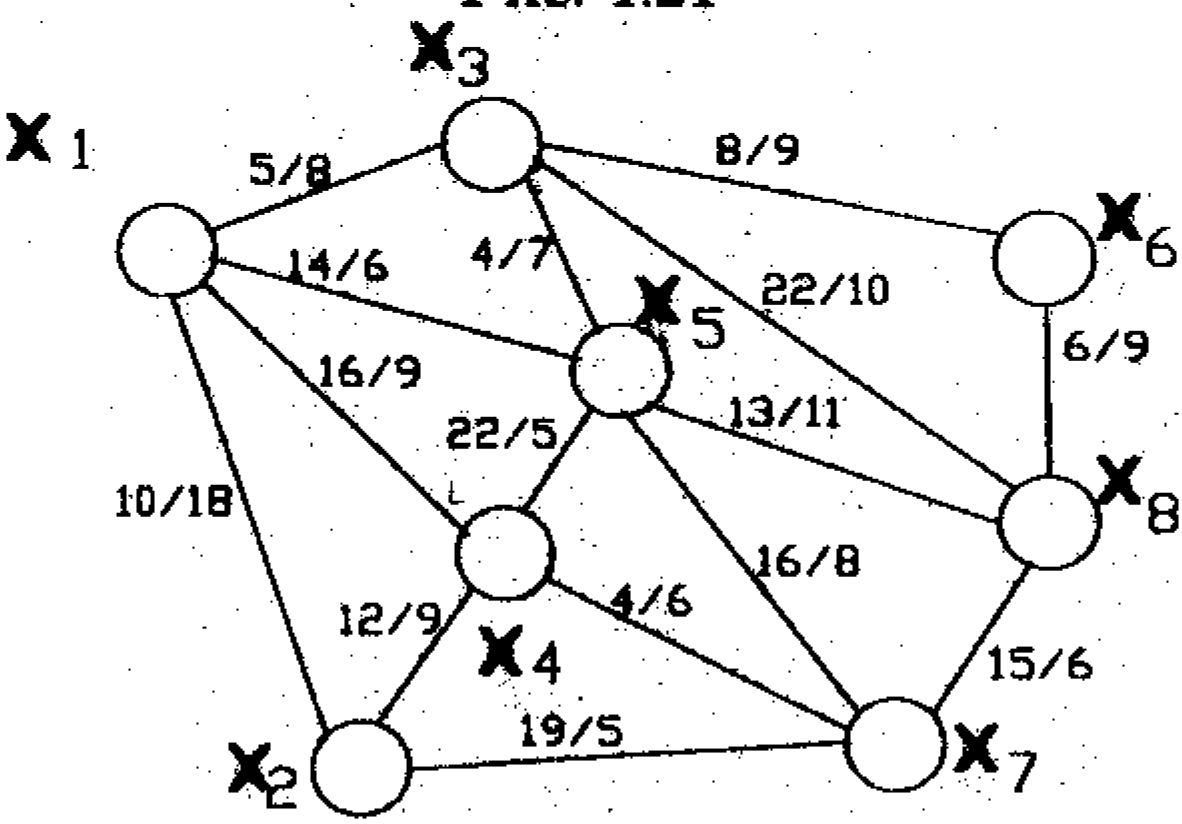


Рис. 1.22

1.2. Анализ сетей Петри

Сеть Петри задана графически (рис. 1.23-1.28). В табл. 1.1 приведены различные варианты начальных маркировок сети (варианты 1-7, рис. 1.23, I.27, I.28; варианты 8-20, рис. I.24, I.25, I.26).

Выполнить следующие действия:

1. Описать сеть аналитическим и матричным способами.

2. Проверить условия срабатывания каждого из переходов и найти новые маркировки, к которым приведет срабатывание соответствующих переходов, путем выполнения матричных преобразований.

3. Построить дерево достижимости заданной сети.

4. Проверить, является ли достижимой одна из маркировок, получаемых на четвертом шаге построения дерева, составив и решив матричные уравнения.

Таблица 1.1

N варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0	1	0	1	1	1	1	2	0	1	0	2	0	3	1	1	0	2	1	1
	1	2	2	2	3	1	2	2	3	2	4	1	3	1	2	1	2	3	0	1
	2	3	1	0	1	1	1	3	4	1	0	3	1	3	0	1	2	1	1	2
	3	1	3	4	0	2	1	1	1	3	3	4	2	2	1	2	1	1	2	3
	1	2	5	1	3	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

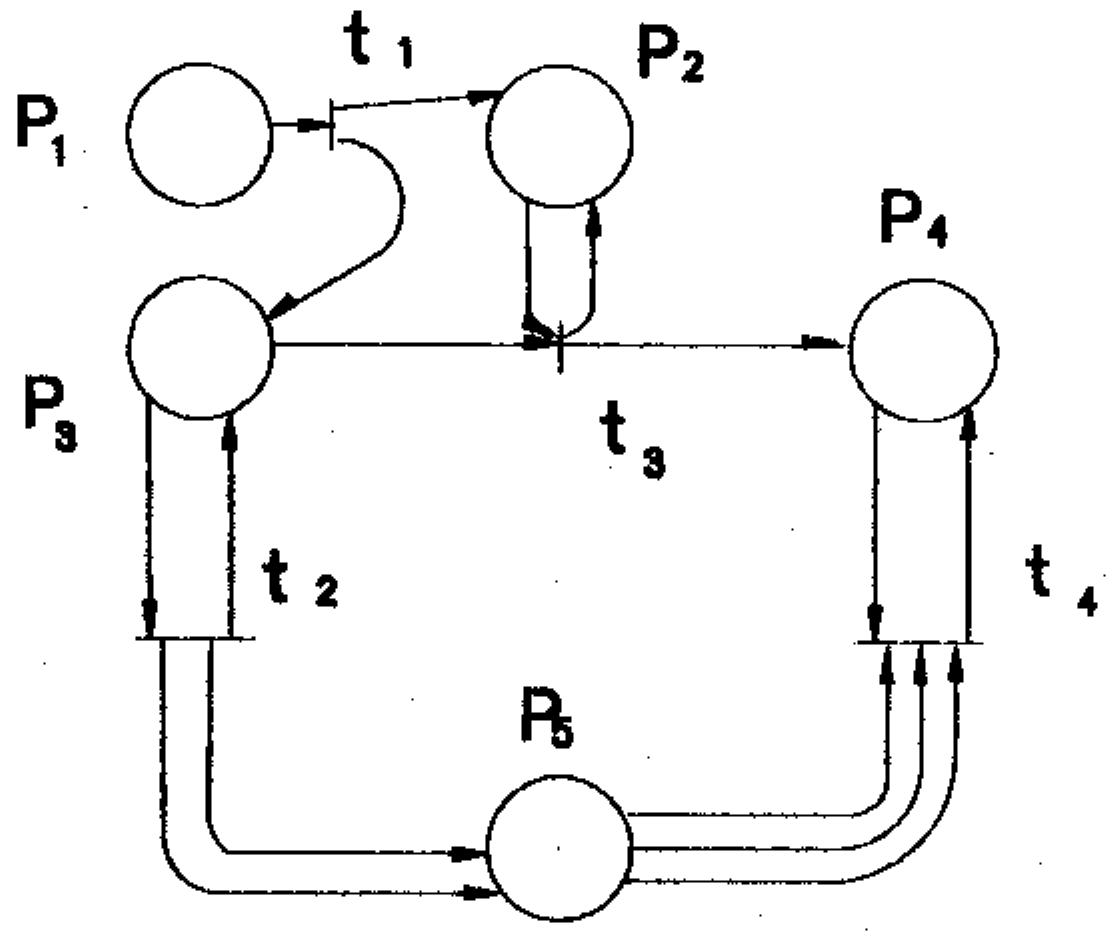


Рис. 1.23

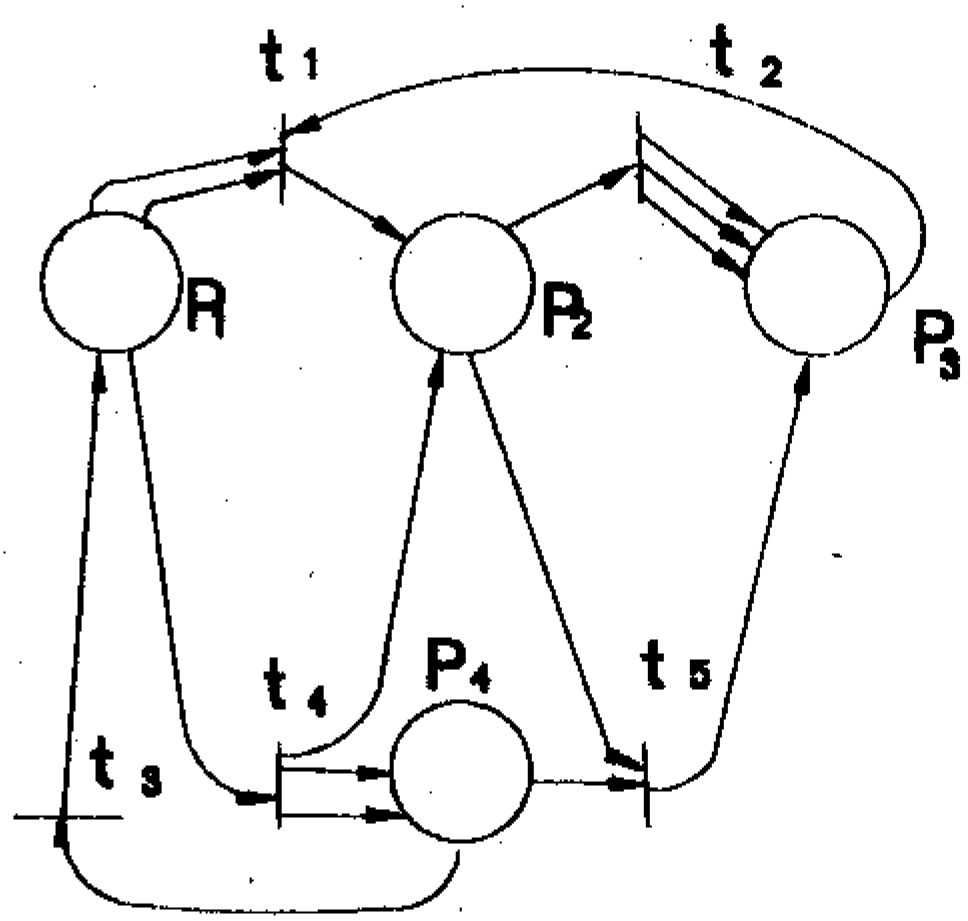


Рис. 1.24

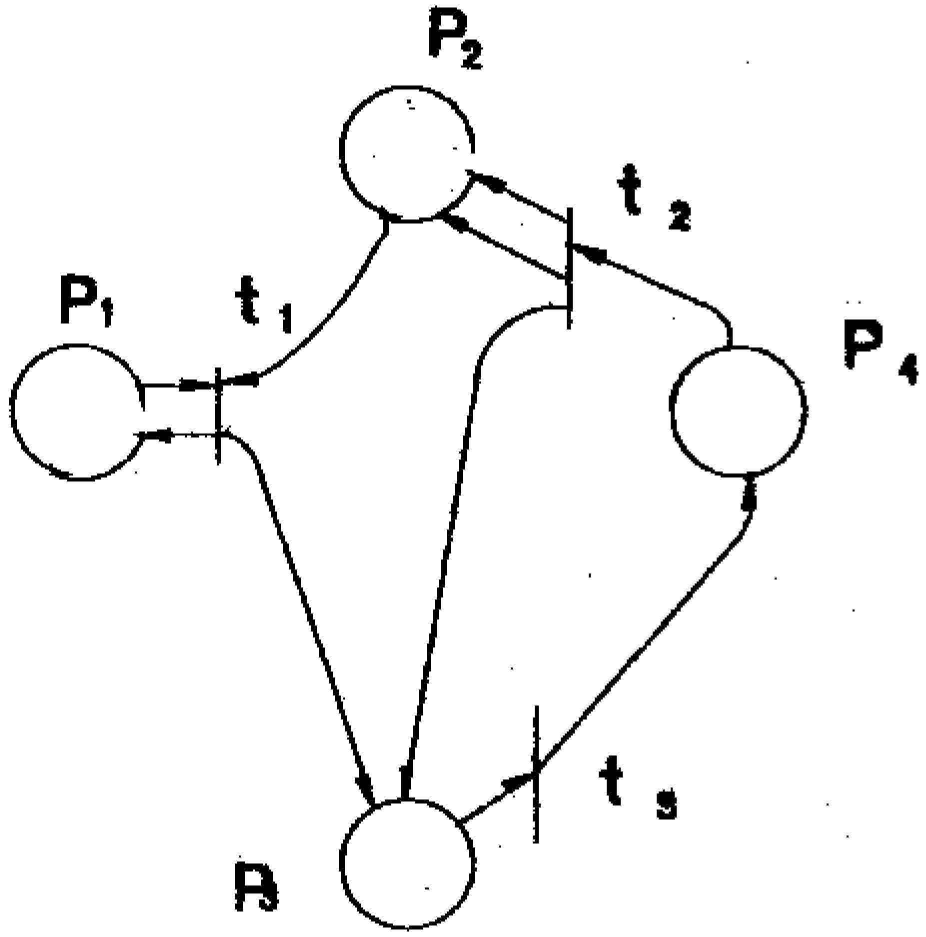


Рис. 1.25

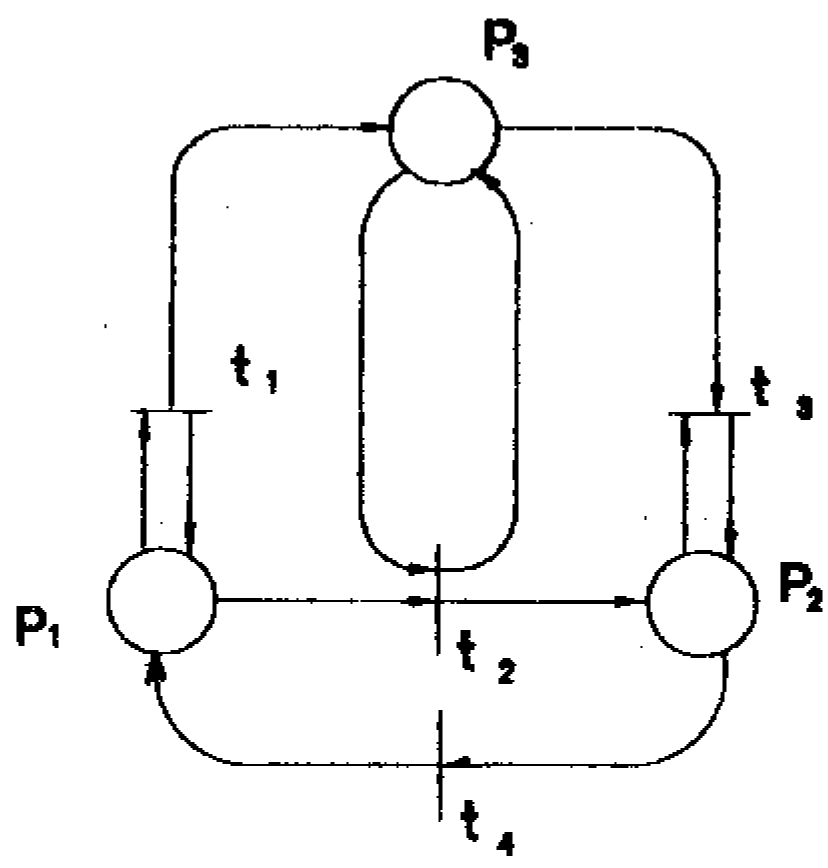


Рис. 1.26

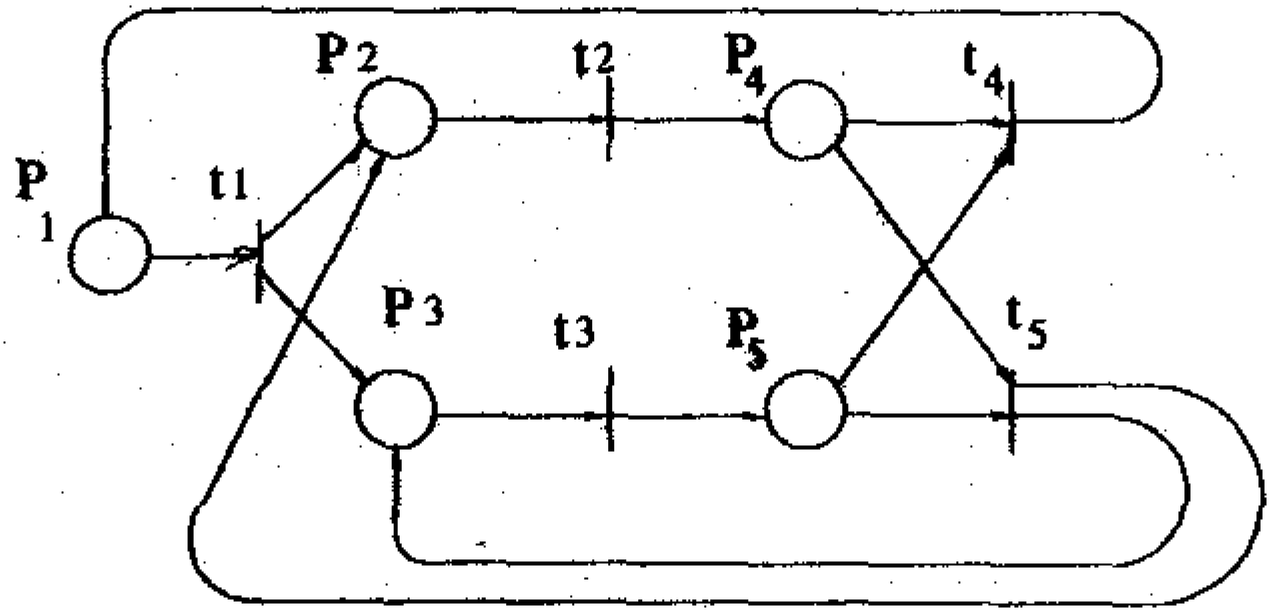


Рис. 1.27

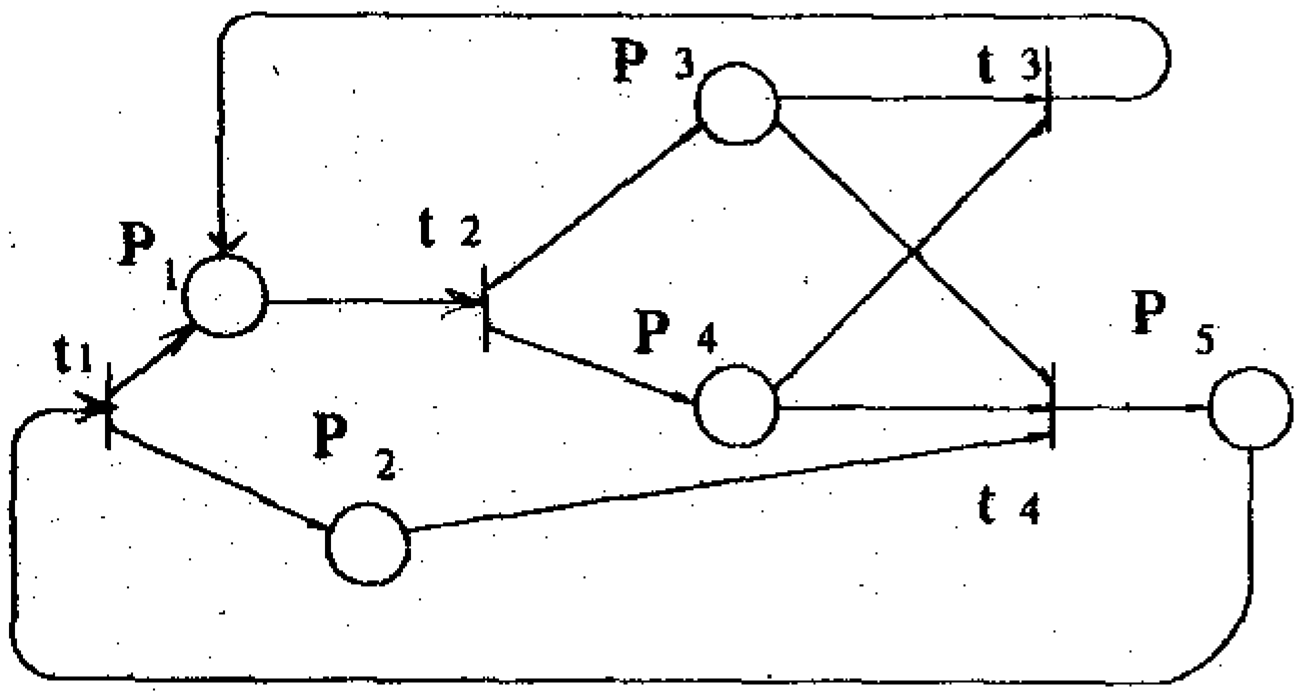


Рис. 1.28

Пример. Для сети, изображенной на рис. I.25, выполнить последовательность действий, указанных в задании.

1. Аналитическое задание сети Петри: $S = \{P, T, O, I, \mu^0\}$

Множество позиций $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Множество переходов $T = \{t_1, t_2, t_3\}$. Начальная маркировка $\mu^0 = [0\ 4\ 0\ 3]$.

$$I(t_1) = \{p_1, p_2\}, \qquad O(t_1) = \{p_1, p_3\},$$
$$I(t_2) = \{p_4\}, \qquad O(t_2) = \{p_1, p_2, p_3\},$$
$$I(t_3) = \{p_3\}, \qquad O(t_3) = \{p_4\},$$

$I(t)$ и $O(t)$ – функции входных и выходных инциденций.

Матричное задание сети Петри:

$$D^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ – матрица входных инциденций;

$$D^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ – матрица выходных инциденций.

Матрица инцидентности $D = D^+ - D^-$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Условия срабатывания

а) перехода t_1: $\mu^{0T} \geqslant [1\ 0\ 0] \cdot D^-$

$$[\,0\ 4\ 0\ 3\,] \geqslant [\,1\ 0\ 0\,] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\,1\ 1\ 0\ 0\,].$$

Условие не выполняется и, следовательно, переход t_1 запрещен;

б) перехода t_2: $\mu^{0T} \geqslant [0\ 1\ 0] \cdot D^-$

$$[\,0\ 4\ 0\ 3\,] \geqslant [\,0\ 1\ 0\,] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\,0\ 0\ 0\ 1\,].$$

Условие срабатывания выполняется, переход t_2 разрешен.

в) переход t_3: $\mu^{oT} \geqslant [0\ 0\ 1] \cdot D^-$

$$\begin{bmatrix}0\\4\\0\\3\end{bmatrix}^T \ngeqslant [\,0\,0\,1\,] \cdot \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}^T .$$

Условие срабатывания не выполняется и переход t_3 запрещен.

Определим новую маркировку, полученную в результате срабатывания перехода t_2:

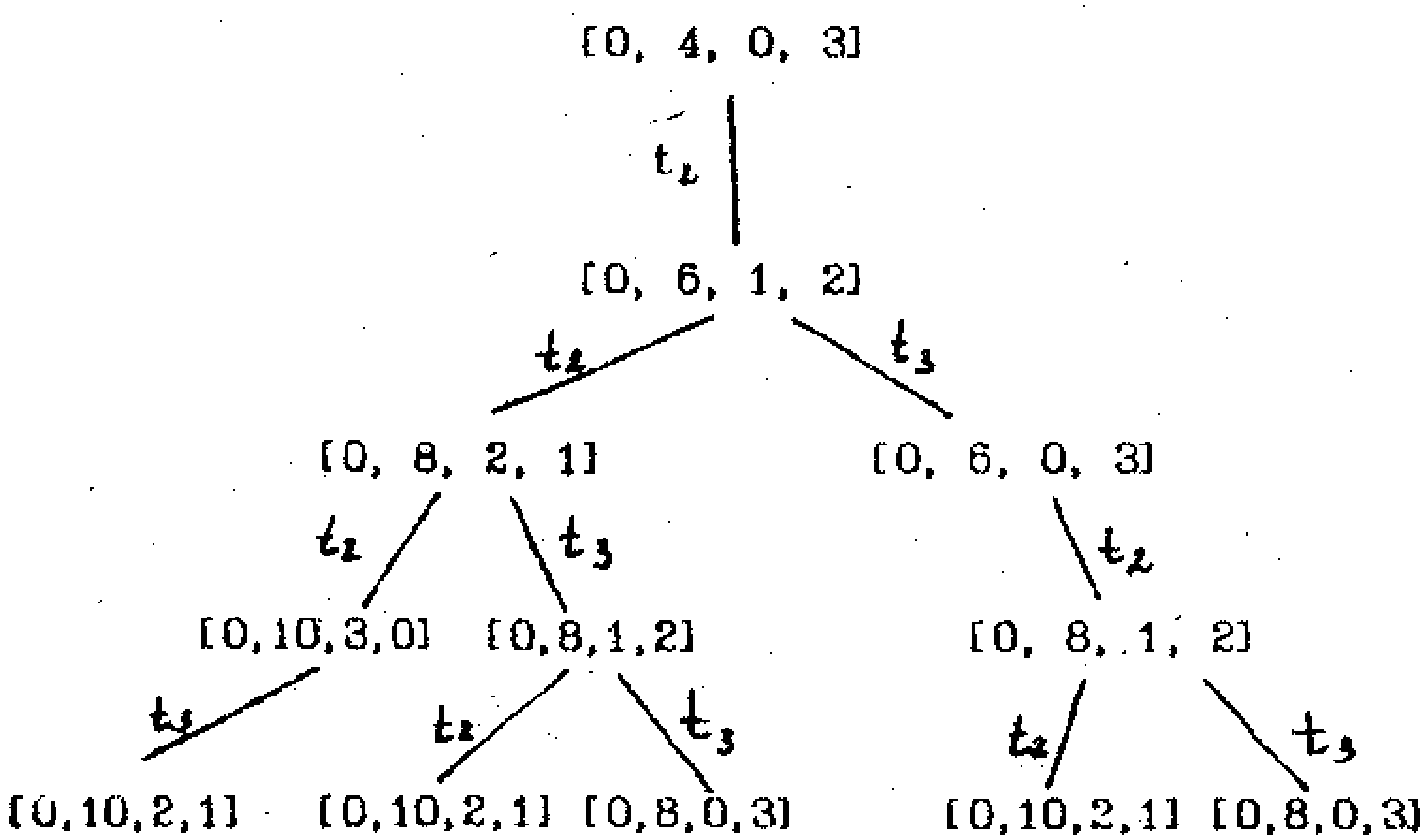
$$\mu^{1T} = \mu^{oT} + f^T(\sigma) \cdot D, \text{ где } f^T(\sigma) = [\,0\ 1\ 0\,].$$

Итак,

$$\mu^{1T} = [\,0\ 4\ 0\ 3\,] + [\,0\ 1\ 0\,] \cdot \begin{bmatrix}0&-1&1&0\\0&2&1&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix} =$$

$$= [\,0\ 4\ 0\ 3\,] + [\,0\ 2\ 1\ -1\,] = [\,0\ 6\ 1\ 2\,].$$

3. Дерево достижимости для заданной начальной маркировки



4. Определим достижимость маркировки [0, 10, 2, 1].
Составляем матричное уравнение

$$[0,10,2,1] = [x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + [0,4,0,3] \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 10 - 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + x_3 = 1 - 3 \end{cases}$$

решая которую, находим, что $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$.

Итак, маркировкка [0, 10, 2, 1] достижима и для достижения этой маркировки необходимо, чтобы переход t_2 сработал 3 раза, а переход t_3 - один раз.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ

2.1. Исследование характеристик непериодических сигналов

В табл. 2.1 приведены аналитическое и графическое представления разного рода непериодических сигналов $f(t)$. Для заданного варианта необходимо последовательно выполнить следующие действия:

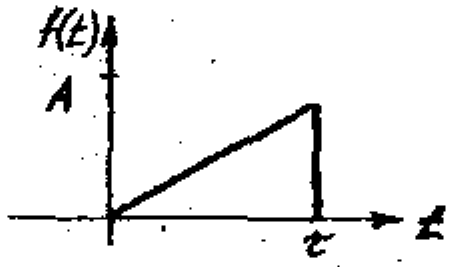
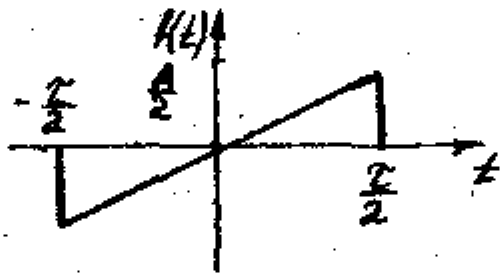
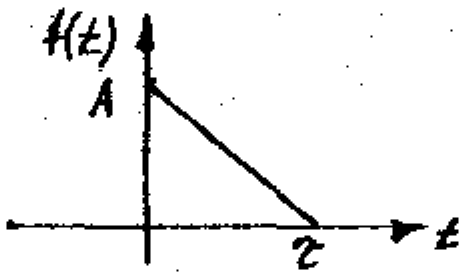
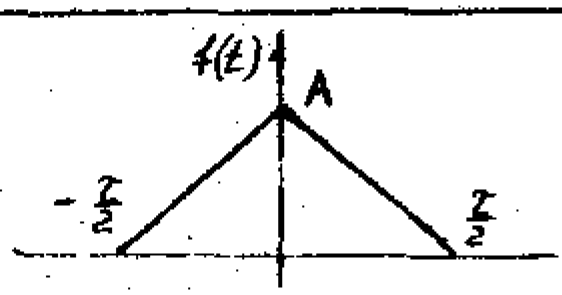
1. Рассчитать и построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры сигнала в полосе частот, ограничивающей модуль АЧХ на уровне не менее 10 % от максимального значения.

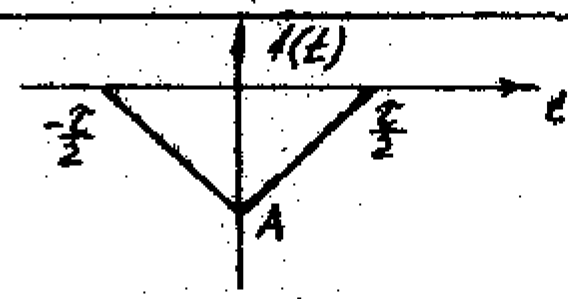
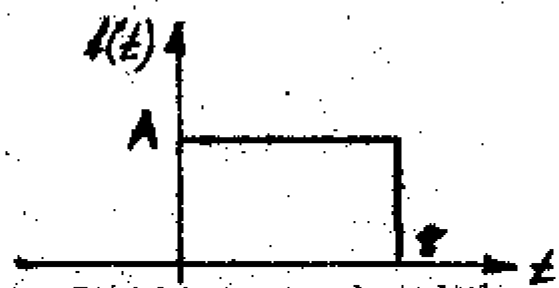
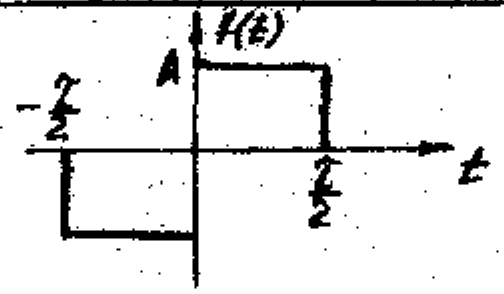
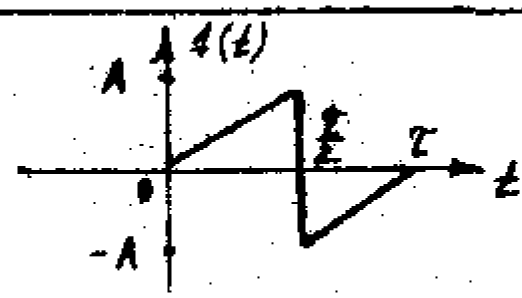
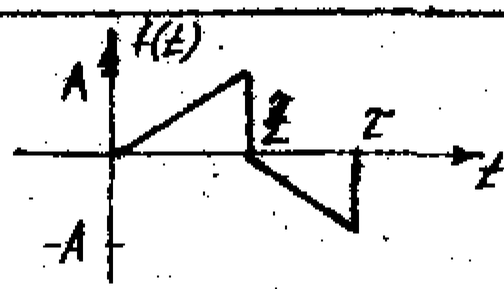
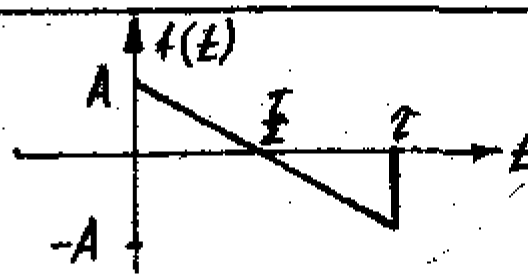
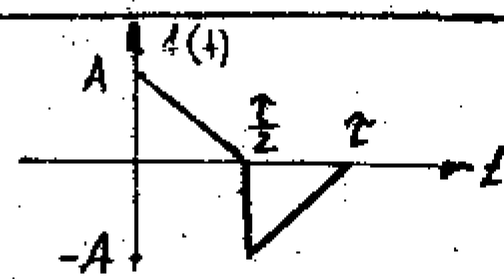
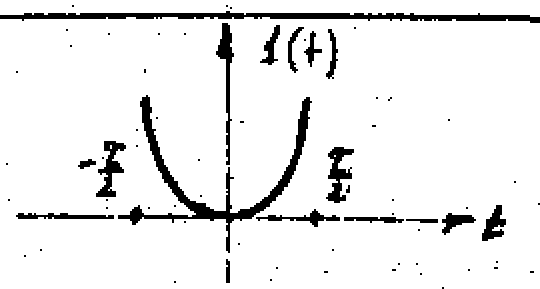
2. Вычислить автокорреляционную функцию сигнала.

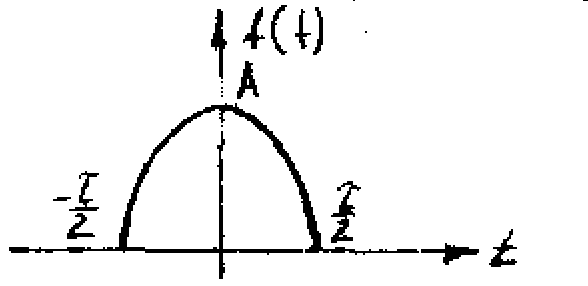
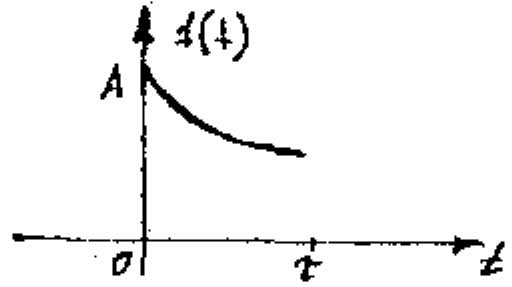
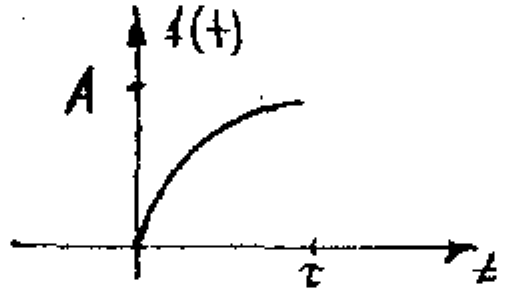
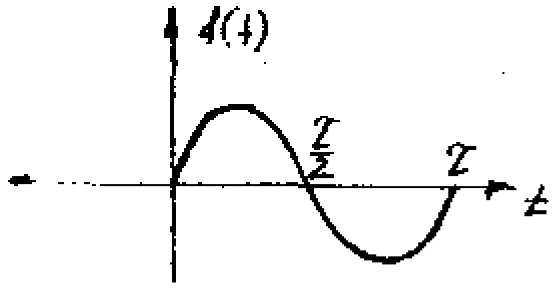
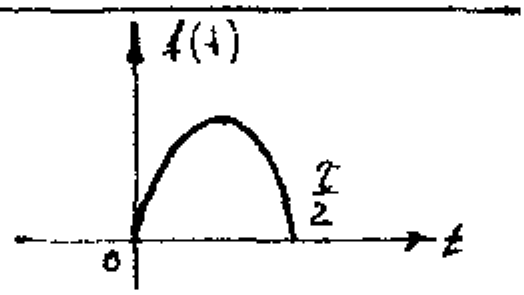
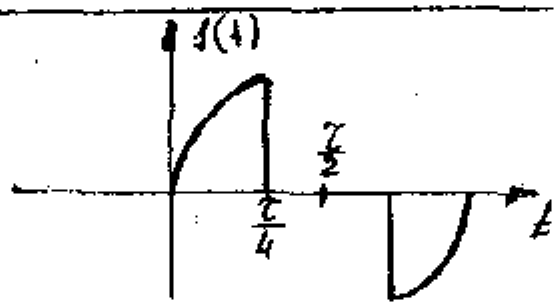
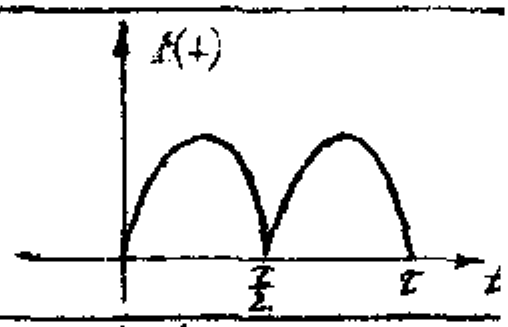
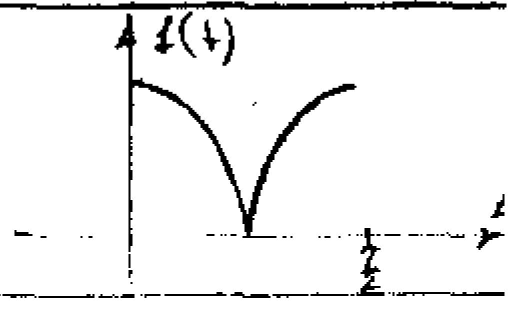
3. Построить зависимость ширины спектра от длительности импульса.

4. Аппроксимировать сигнал системой ортогональных полиномов Лежандра.

Таблица 2.1

N вар	Аналитическое описание сигнала	Графическое представление
1	$f(t)=\begin{cases} A\frac{t}{\tau} \text{ при } t\in[0,\tau] \\ 0 \text{ при других } t \end{cases}$	
2	$f(t)=\begin{cases} A\frac{t}{\tau} \text{ при } t\in[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}] \\ 0 \text{ при других } t \end{cases}$	
3	$f(t)=\begin{cases} A(1-\frac{t}{\tau}) \text{ при } t\in[0,\tau] \\ 0 \text{ при других } t \end{cases}$	
4	$f(t)=\begin{cases} A-\lvert t\rvert \text{ при } t\in[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}] \\ 0 \text{ при других } t \end{cases}$	

N вар	Аналитическое описание сигнала	Графическое представление
5	$f(t)=\begin{cases} \lvert t\rvert - A & \text{при } t\in[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
6	$f(t)=\begin{cases} A & \text{при } t\in[0,\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
7	$f(t)=\begin{cases} A & \text{при } t\in[0,\frac{\tau}{2}] \\ -A & \text{при } t\in[-\frac{\tau}{2},0] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
8	$f(t)=\begin{cases} 2A\frac{t}{\tau} & \text{при } t\in[0,\frac{\tau}{2}] \\ 2A(\frac{t}{\tau}-1) & \text{при } t\in[\frac{\tau}{2},\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
9	$f(t)=\begin{cases} 2A\frac{t}{\tau} & \text{при } t\in[0,\frac{\tau}{2}] \\ 2A(\frac{1}{2}-\frac{t}{\tau}) & \text{при } t\in[\frac{\tau}{2},\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
10	$f(t)=\begin{cases} 2A(\frac{1}{2}-\frac{t}{\tau}) & \text{при } t\in[0,\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
11	$f(t)=\begin{cases} 2A(\frac{1}{2}-\frac{t}{\tau}) & \text{при } t\in[0,\frac{\tau}{2}] \\ 2A(\frac{t}{\tau}-1) & \text{при } t\in[\frac{\tau}{2},\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
12	$f(t)=\begin{cases} At^2 & \text{при } t\in[-\frac{\tau}{2};\frac{\tau}{2}] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	

N вар	Аналитическое описание сигнала	Графическое представление
13	$f(t)=\begin{cases} A(1-t^2) & \text{при } t\in[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
14	$f(t)=\begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{при } t\in[0,\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
15	$f(t)=\begin{cases} A(1-e^{-\alpha t}) & \text{при } t\in[0,\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
16	$f(t)=\begin{cases} A\sin\frac{2\pi t}{\tau} & \text{при } t\in[0,\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
17	$f(t)=\begin{cases} A\sin\frac{2\pi t}{\tau} & \text{при } t\in[0,\frac{\tau}{2}] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
18	$f(t)=\begin{cases} A\sin\frac{2\pi t}{\tau} & t\in[0,\frac{\tau}{4}],\ t\in[\frac{3}{4}\tau,\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
19	$f(t)=\begin{cases} A\left\|\sin\frac{2\pi t}{\tau}\right\| & \text{при } t\in[0,\tau] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	
20	$f(t)=\begin{cases} A\left\|\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right\| & \text{при } t\in[0,\frac{\tau}{2}] \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$	

2.2. Исследование характеристик периодических сигналов

Дополнить заданный непериодический сигнал такими же сигналами, периодически следующими через некоторый интервал времени T, приняв: а) $T=\tau$; б) $T=2\tau$; в) $T=3\tau$; г) $T=4\tau$.

Для получившейся периодической последовательности выполнить следующие задания:

1. Рассчитать и построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры сигнала.
2. Вычислить распределение мощности по гармоникам. Определить ширину спектра сигнала.
3. Построить зависимость ширины спектра сигнала от длительности импульса.

2.3. Исследование характеристик случайных сигналов

Стационарный случайный процесс x(t) задан либо корреляционной функцией $K_x(\tau)$, либо спектральной плотностью $S_x(\omega)$ (см. табл. 2.2).

Выполнить следующие задания:

1. Определить недостающую характеристику случайного процесса. Исследовать влияние коэффициентов α и β на вид корреляционной функции и спектральной плотности.
2. Определить эффективную ширину $\Delta\omega_э$ спектра $S_x(\omega)$.
3. Определить корреляционную функцию и дисперсию случайных процессов

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}, \quad y(t)=\int_0^t x(\xi)d\xi.$$

Таблица 2.2

№ вар.	Корреляционная функция $K_x(\tau)$
1	$K_x(\tau) = A - \frac{A}{\alpha}\|A\|$ при $t \in [0, \alpha]$ $A = const$
2	$K_x(\tau) = De^{-\alpha\|\tau\|}$ $\alpha > 0$
3	$K_x(\tau) = e^{-\alpha\|\tau\|}\cos\beta\tau$
4	$K_x(\tau) = De^{-\alpha\|\tau\|}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\|\tau\|)$
5	$K_x(\tau) = \frac{1}{1+\alpha^2\tau^2}$
6	$K_x(\tau) = \alpha^2\delta(\tau)$
7	$K_x(\tau) = \alpha e^{-\alpha\|\tau\|}(1+\alpha\|\tau\|)$
8	$K_x(\tau) = \alpha_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$
9	$K_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$
10	$K_x(\tau) = \frac{N\omega_0}{\pi}\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}$

11	$K_x(\tau) = \alpha_x^2 \cos\omega_0\tau * \dfrac{\sin\frac{\Delta\omega_0\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega_0\tau}{2}}$
12	$K_x(\tau) = \dfrac{1}{1+\alpha^3\tau^3}$
№ Вар	Спектральная плотность $S_x(\omega)$
13	$S_x(\omega) = S_0 e^{-\beta\omega^2}$
14	$S_x(\omega) = \begin{cases} S_0 & \text{при } \omega\in[-\omega_0, \omega_0] \\ 0 & \text{при других } \omega \end{cases}$
15	$S_x(\omega) = \dfrac{4\alpha_x^2\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}(a^2+b^2\omega^2)$
16	$S_x(\omega) = \dfrac{4\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
17	$S_x(\omega) = \dfrac{2\alpha\sigma_x^2\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}$
18	$S_x(\omega) = \begin{cases} -\frac{S_0}{2} & \text{при } \omega\in[-\omega_2, -\omega_1] \\ \frac{S_0}{2} & \text{при } \omega\in[\omega_1, \omega_2] \\ 0 & \text{при других } \omega \end{cases}$
19	$S_x(\omega) = \sigma_x^2 \left[\dfrac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right]^2$
20	$S_x(\omega) = \begin{cases} C\cos 2\pi f C & \text{при } 0\le f\le F, \quad F=\frac{1}{4C} \\ 0 & \text{при других } f \end{cases}$

Пример. Для сигнала $f(t)=\begin{cases}2A\frac{t}{\tau} & \text{при } t\in[0,\frac{\tau}{2}],\\ 2A(1-\frac{t}{\tau}) & \text{при } t\in[\frac{\tau}{2},\tau].\end{cases}$ выполнить последовательность действий, указанных в задании.

1. Рассчитать и построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры сигнала.

$$F(j\omega)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt-j\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=$$

$$=A(\omega)-jB(\omega)=|F(j\omega)|\cdot e^{j\Psi(\omega)}.$$

$|F(j\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}$ – выражение для АЧ спектра;

$\Psi(\omega)=-\mathrm{arctg}\,\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$ – выражение для ФЧ спектра;

$$A(\omega)=\int_0^{\frac{\tau}{2}}\frac{2At}{\tau}\cos\omega t\,dt+\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}2A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cos\omega t\,dt=\frac{2A}{\tau}\cdot\frac{\cos\omega t}{\omega^2}\Bigg|_0^{\frac{\tau}{2}}+$$

$$+\frac{2A}{\tau}\cdot\left(t\,\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{\tau}{2}}+\frac{2A}{\omega}\sin\omega t\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}-\frac{2A}{\tau}\cdot\frac{\cos\omega t}{\omega^2}\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}-$$

$$-\frac{2A}{\tau}\cdot\left(t\,\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}=\frac{2A}{\omega^2\tau}\left(2\cos\frac{\omega\tau}{2}-\cos\omega\tau-1\right).$$

$$B(\omega)=\frac{2A}{\tau}\int_0^{\frac{\tau}{2}}t\sin\omega t\,dt+2A\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\sin\omega t\,dt-\frac{2A}{\tau}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}t\sin\omega t\,dt=$$

$$=\frac{2A}{\tau}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega^2}-\frac{t\cos\omega t}{\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{\tau}{2}}-\frac{2A}{\omega}\cos\omega t\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}-$$

$$-\frac{2A}{\tau}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega^2}-\frac{t\cos\omega t}{\omega}\right)\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}=\frac{2A}{\tau\omega^2}\cdot\left(2\sin\frac{\omega\tau}{2}-\sin\omega\tau\right).$$

По полученным выражениям рассчитаны значения $A(\omega)$, $B(\omega)$, $|F(j\omega)|$, $\Psi(\omega)$. Результаты расчетов сведены в табл. 2.3. Полагалось, что $A = 10$, $\tau = 0{,}01$.

Таблица 2.3

ω	$A(\omega)\cdot 10^3$	$B(\omega)\cdot 10^3$	$\lvert F(j\omega)\rvert\cdot 10^3$	$\Psi(\omega)$
0	0,05	0	0,05	0
$\frac{\pi}{\tau}$	0	40,53	40,53	1,57
$\frac{1{,}6\pi}{\tau}$	-20,17	16,83	28,64	0,628
$\frac{2\pi}{\tau}$	-20,26	0	20,26	0
$\frac{2{,}6\pi}{\tau}$	-5,59	-7,7	9,52	-0,942
$\frac{3\pi}{\tau}$	0	-4,5	4,5	1,57
$\frac{3{,}6\pi}{\tau}$	0,48	-0,35	0,6	0,628
$\frac{4\pi}{\tau}$	0	0	0	0
$\frac{4{,}6\pi}{\tau}$	0,46	0,64	0,79	-0,942
$\frac{5\pi}{\tau}$	0	1,62	1,62	-1,571
$\frac{5{,}6\pi}{\tau}$	-1,89	1,37	2,34	0,628

На рис. 2.I приведены амплитудно-частотный и фазочастотный спектры сигнала.

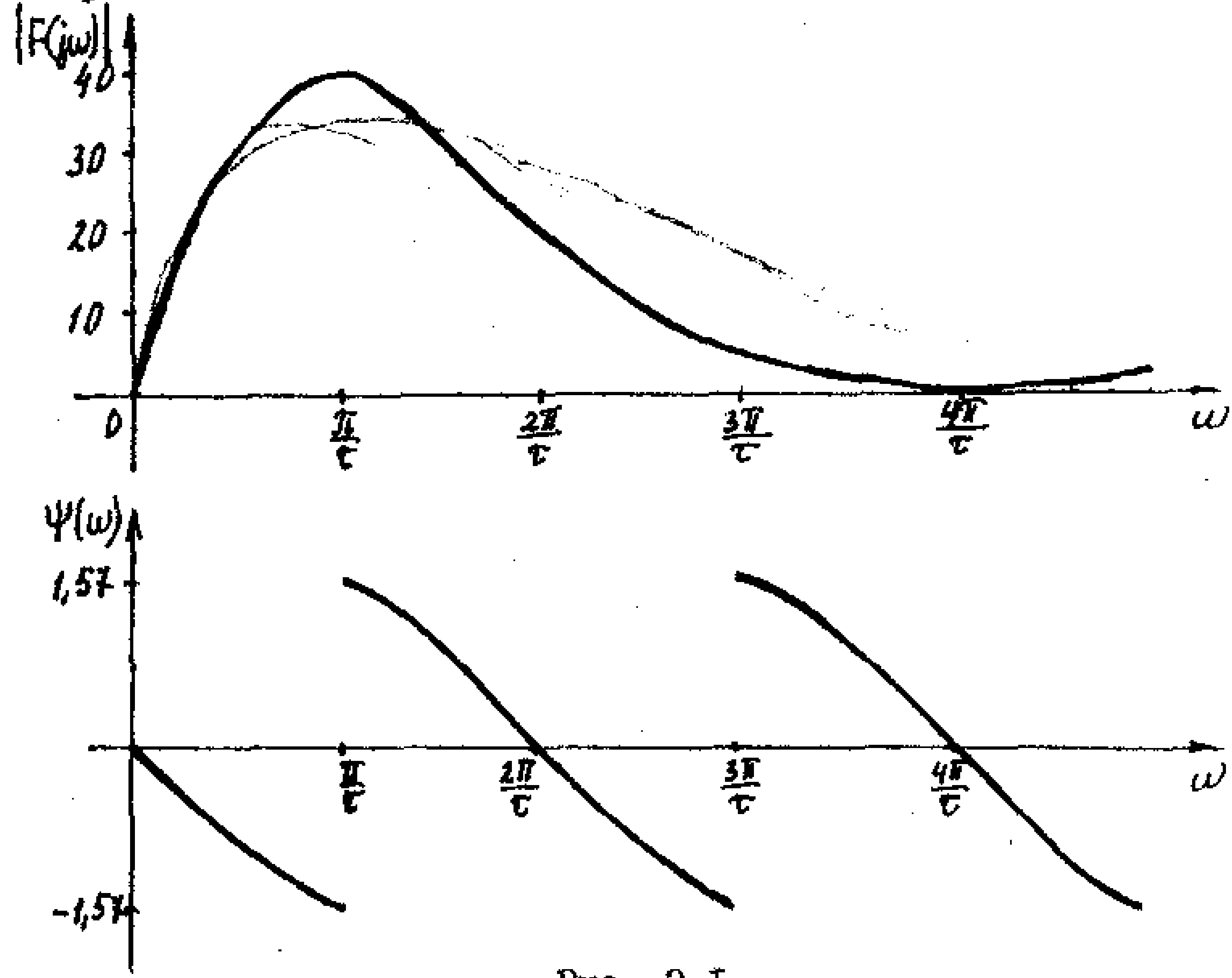


Рис. 2.I

2. Вычислить автокорреляционную функцию $K(\xi)$.

$$K(\xi)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot f(t-\xi)\,dt$$

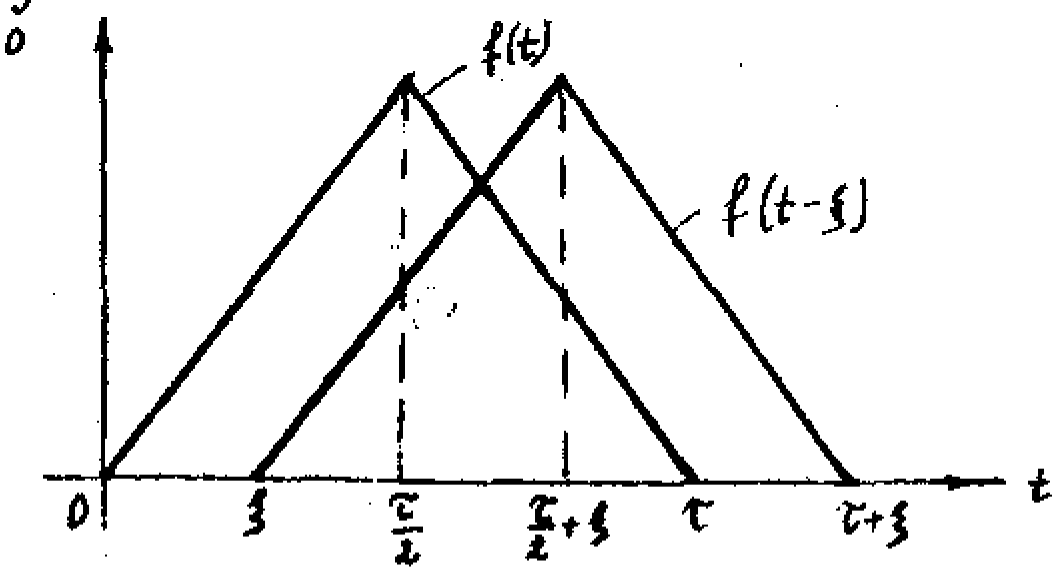


Рис. 2.2

$$K(\xi)=\int\limits_{\xi}^{\frac{\tau}{2}} 2A\frac{t}{\tau}\cdot 2A\frac{(t-\xi)}{\tau}dt+\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+\xi} 2A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cdot 2A\frac{(t-\xi)}{\tau}dt+$$

$$+\int\limits_{\frac{\tau}{2}+\xi}^{\tau} 2A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cdot 2A\left(1-\frac{t-\xi}{\tau}\right)dt=\frac{4A^2}{\tau^2}\left(\frac{t^3}{3}-\xi\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{\xi}^{\frac{\tau}{2}}+$$

$$+\frac{4A^2}{\tau}\left(\frac{t^2}{2}-\xi t-\frac{t^3}{3\tau}+\xi\frac{t^2}{2\tau}\right)\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+\xi}+$$

$$+\frac{4A^2}{\tau}\left(\tau t-\frac{t^2}{2}+\xi t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3\tau}-\xi\frac{t^2}{2\tau}\right)\Bigg|_{\frac{\tau}{2}+\xi}^{\tau}=$$

$$=\frac{4A^2}{\tau}\left(\frac{\xi^3}{6\tau}-\frac{\xi^2}{2}+\frac{\tau^2}{3}\right).$$

При $\xi=\tau$ $\quad K(\xi)=0.$

При $\xi=0$ $\quad K(\xi)=\dfrac{4A^2\tau}{3}.$

3. Рассчитать и построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры периодического сигнала, если $T=4\tau$.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right),$$

где

$$a_n=\frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,dt, \qquad b_n=\frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt.$$

Амплитудно-частотный спектр сигнала определяется выражением $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, а фазочастотный - $\psi_n(n\omega)=\operatorname{arctg}\dfrac{b_n}{a_n}$.

На рис. 2.I приведены амплитудно-частотный и фазочастотный спектры сигнала.

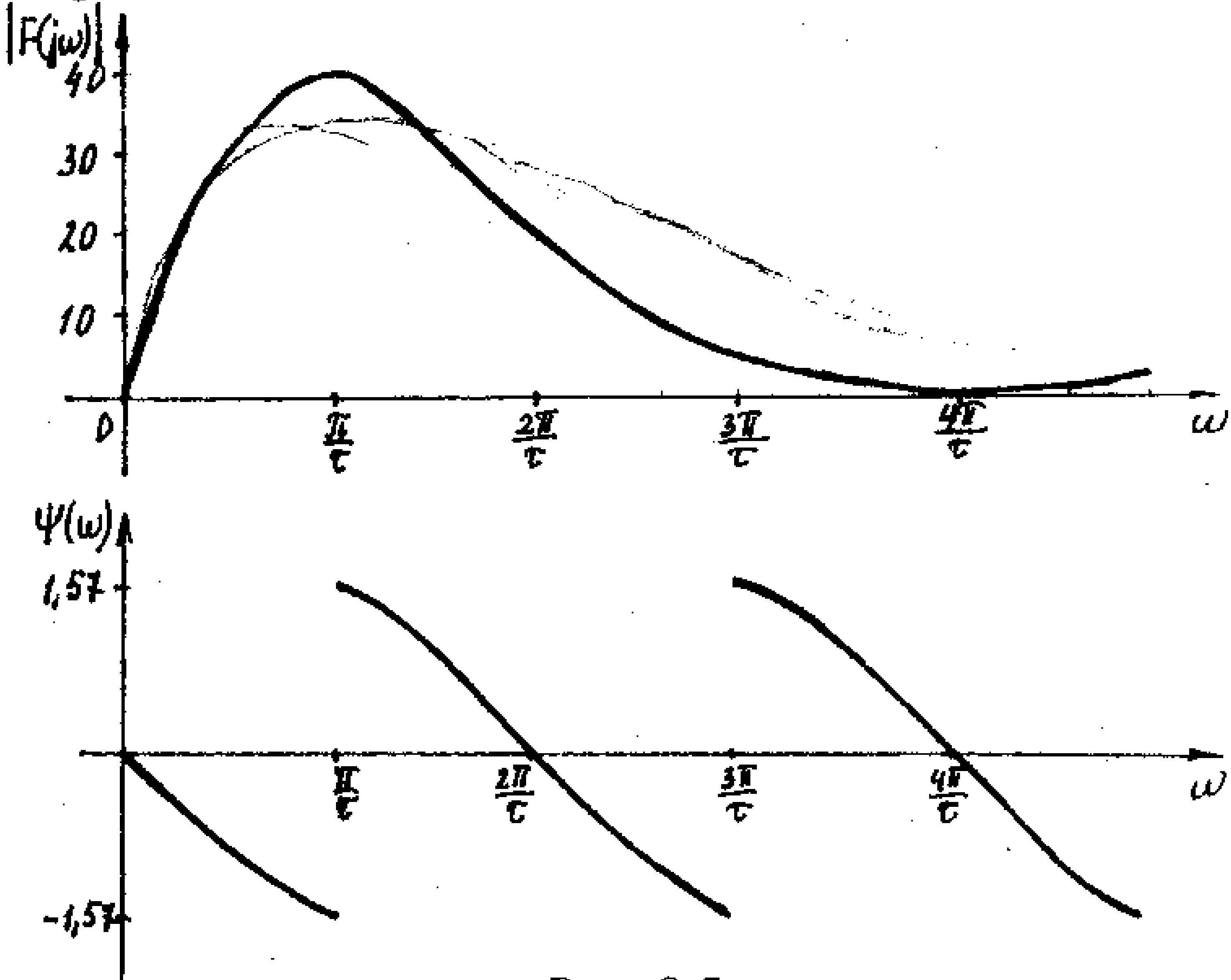


Рис. 2.I

2. Вычислить автокорреляционную функцию $K(\xi)$.

$$K(\xi) = \int_0^\infty f(t) \cdot f(t-\xi)\,dt$$

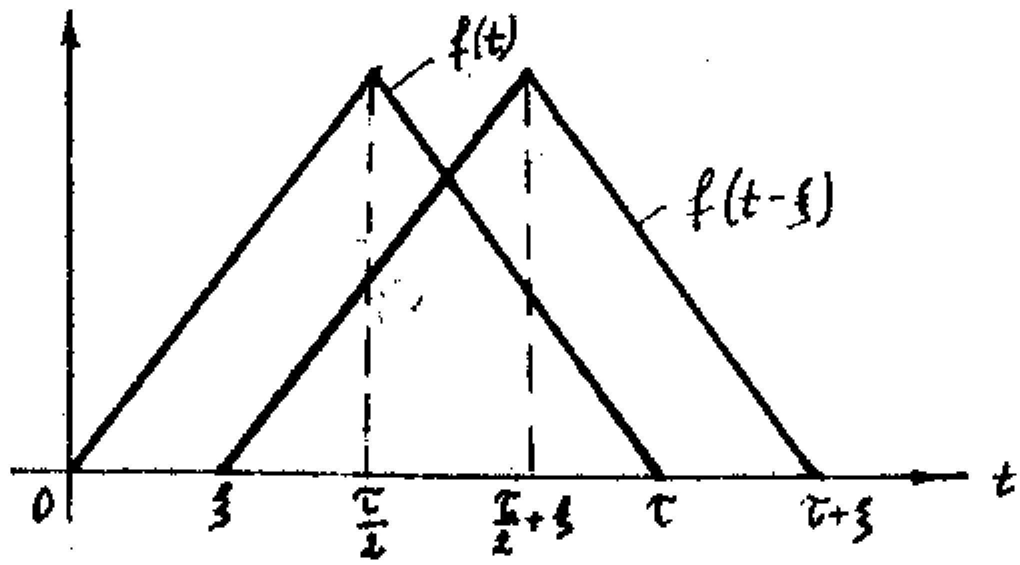


Рис. 2.2

$$K(\xi)=\int\limits_{\xi}^{\frac{\tau}{2}} 2A\frac{t}{\tau}\cdot 2A\frac{(t-\xi)}{\tau}dt+\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+\xi} 2A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cdot 2A\frac{(t-\xi)}{\tau}dt+$$

$$+\int\limits_{\frac{\tau}{2}+\xi}^{\tau} 2A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cdot 2A\left(1-\frac{t-\xi}{\tau}\right)dt=\frac{4A^2}{\tau^2}\left(\frac{t^3}{3}-\xi\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{\xi}^{\frac{\tau}{2}}+$$

$$+\frac{4A^2}{\tau}\left(\frac{t^2}{2}-\xi t-\frac{t^3}{3\tau}+\xi\frac{t^2}{2\tau}\right)\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}+\xi}+$$

$$+\frac{4A^2}{\tau}\left(\tau t-\frac{t^2}{2}+\xi t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3\tau}-\xi\frac{t^2}{2\tau}\right)\Bigg|_{\frac{\tau}{2}+\xi}^{\tau}=$$

$$=\frac{4A^2}{\tau}\left(\frac{\xi^3}{6\tau}-\frac{\xi^2}{2}+\frac{\tau^2}{3}\right).$$

При $\xi=\tau$ $\quad K(\xi)=0.$

При $\xi=0$ $\quad K(\xi)=\dfrac{4A^2\tau}{3}.$

3. Рассчитать и построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры периодического сигнала, если $T=4\tau$.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right),$$

где
$$a_n=\frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,dt,\qquad b_n=\frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt.$$

Амплитудно-частотный спектр сигнала определяется выражением $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, а фазочастотный - $\varphi_n(\omega)=\operatorname{arctg}\dfrac{b_n}{a_n}$.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{\tau}{2}} 2A\frac{t}{\tau}dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 2A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)dt = \frac{4A}{T\tau}\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\tau}{2}} + \frac{4A}{T}t\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} -$$

$$- \frac{4A}{T\tau}\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} = \frac{4A}{T\tau}\cdot\frac{\tau^2}{8} + \frac{4A}{T}\left(\tau-\frac{\tau}{2}\right) - \frac{4A}{T\tau}\frac{\tau^2}{2} + \frac{4A}{T\tau}\cdot\frac{\tau^2}{8} = \frac{A\tau}{T}.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{\tau}{2}} 2A\frac{t}{\tau}\cos n\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 2A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\cos n\omega t\,dt =$$

$$= \frac{4A}{T\tau}\left(\frac{\cos n\omega t}{n^2\omega^2} + \frac{t\sin n\omega t}{n\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{\tau}{2}} + \frac{4A}{T\tau}\left(\frac{\tau\sin n\omega t}{n\omega} - \frac{\cos n\omega t}{n^2\omega^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{t\sin n\omega t}{n\omega}\right)\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} = \frac{4A}{n^2\pi^2}\cdot\left(2\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{2} - 1\right).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{\tau}{2}} 2A\frac{t}{\tau}\sin n\omega t\,dt + \frac{2}{T}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} 2A\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\sin n\omega t\,dt =$$

$$= \frac{4A}{T\tau}\left(\frac{\sin n\omega t}{n^2\omega^2} - \frac{t\cos n\omega t}{n\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{\tau}{2}} - \frac{4A}{T\tau}\left(\frac{\tau\cos n\omega t}{n\omega} + \frac{\sin n\omega t}{n^2\omega^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{t\cos n\omega t}{n\omega}\right)\Bigg|_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} = \frac{4A}{n^2\pi^2}\cdot\left(2\sin\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

По полученным выражениям рассчитаны значения a_n, b_n, A_n, ψ_n; для n = 1...10; $a_0 = 2,5$.

n=1	a=1.679	b=1.679	A=2.374	ψ=0.785 рад.
n=2	a=-0.000	b=2.026	A=2.026	ψ=-1.571
n=3	a=-1.087	b=1.087	A=1.537	ψ=-0.785
n=4	a=-1.013	b=0.000	A=1.013	ψ=0.000
n=5	a=-0.391	b=-0.391	A=0.553	ψ=0.785
n=6	a=0.000	b=-0.225	A=0.225	ψ=-1.571
n=7	a=0.034	b=-0.034	A=0.048	ψ=-0.785
n=8	a=-0.000	b=0.000	A=0.000	ψ=0.000
n=9	a=0.021	b=0.021	A=0.029	ψ=0.785
n=10	a=-0.000	b=0.081	A=0.081	ψ=-1.571

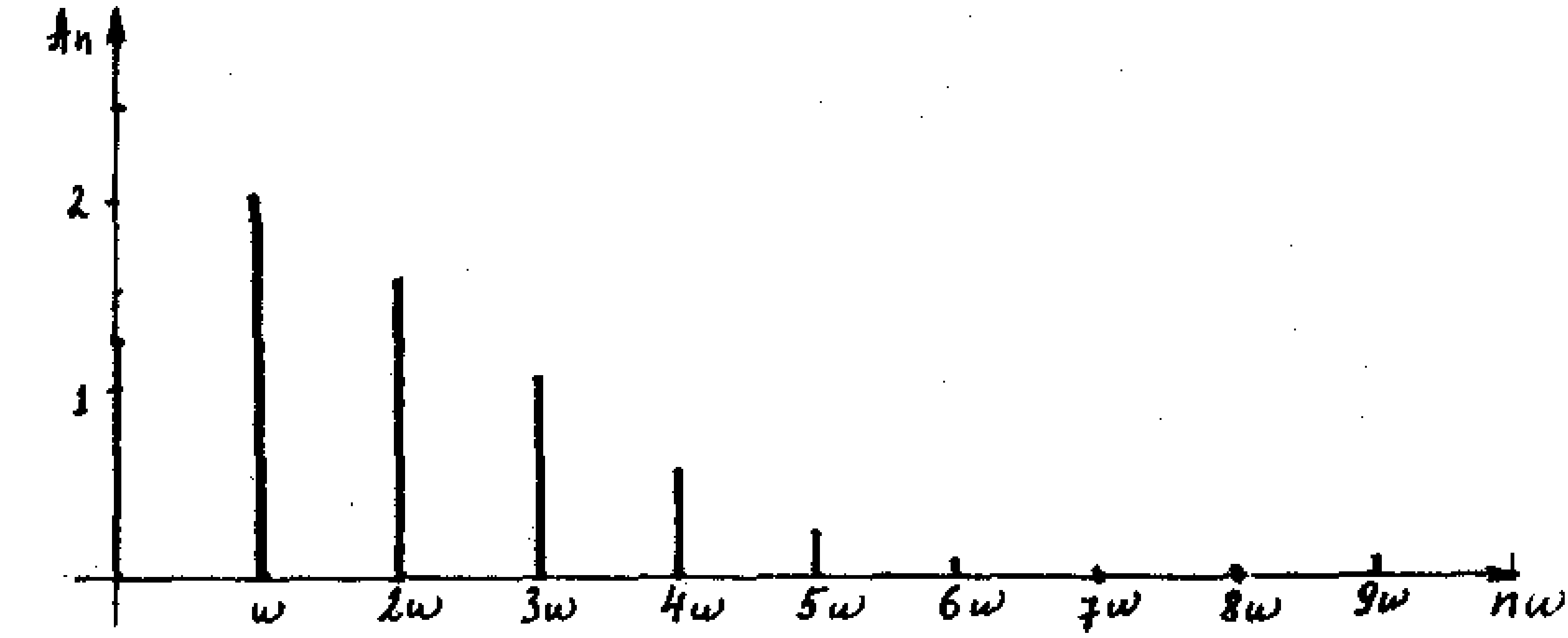


Рис. 2.3

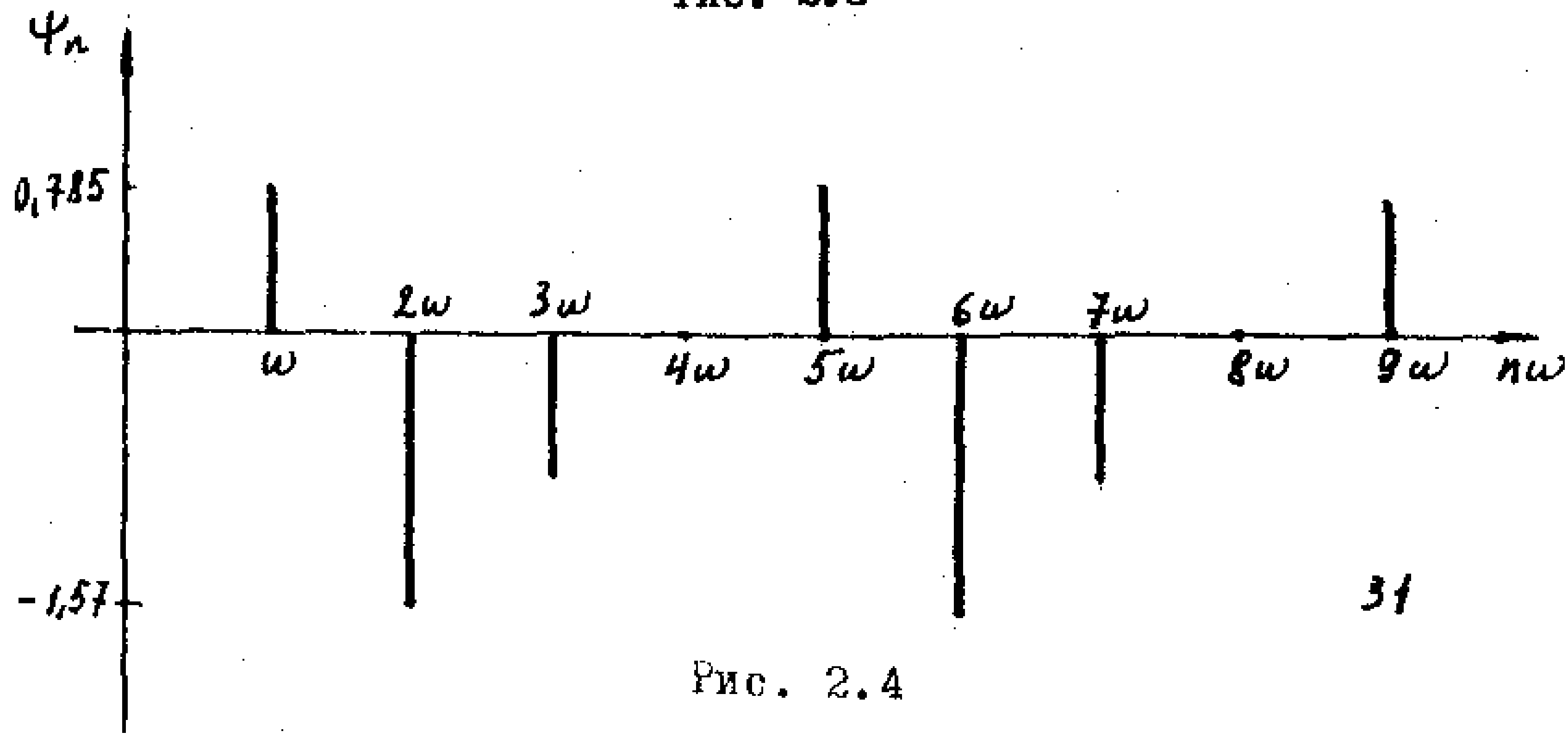


Рис. 2.4

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции САУ

Передаточная функция $w(p)$ линейной системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Значения коэффициентов a_i и b_j определяются табл. 3.1 в соответствии с номером варианта задачи.

Выполнить следующие задания:

1. Записать дифференциальное уравнение системы.
2. Найти корни характеристического уравнения системы.
3. Определить устойчивость системы по критерию Гурвица.
4. Вычислить импульсную переходную характеристику $w(t)$.
5. Найти корреляционную функцию сигнала на выходе системы, если на входе системы действует белый шум с корреляционной функцией $K(\tau) = c^2 \cdot \delta(\tau)$.

Коэффициент С задан в табл. 3.1.

3.2. Метод пространства состояний

1. Записать уравнения состояния системы, имеющей передаточную функцию $W(p)$, заданную в пункте 3.1, в стандартной и нормальной форме.

2. Изобразить блок-схему модели системы, представленной уравнениями состояния в стандартной и нормальной форме.

3. Найти решение уравнений состояния $y(t)$ для обоих случаев, если

$$y(0) = c, \quad \dot{y}(t) = \ddot{y}(t) = 0.$$

Таблица 3.1

N вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_2	9	12	15	21	18	24	27	8	10	14	12	14	16	15	14	16	18	14	13
a_1	26	47	74	146	107	191	242	17	27	56	39	53	69	54	59	76	95	63	54
a_0	24	60	120	336	210	504	720	10	18	64	28	40	54	40	70	96	126	90	72
b_2	8	6	3	2	1	0	0	2	7	2	2	2	2	0	1	4	2	3	1
b_1	2	3	2	4	2	2	7	4	8	3	3	4	8	2	3	7	6	1	7
b_0	4	2	1	3	5	5	6	6	8	9	8	6	10	5	6	5	3	4	5
c	5	4	3	6	4	1	3	2	4	3	5	7	7	2	1	3	4	8	3

N вар.	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
a_2	18	18	9	20	20	17	19	15	28	28	27	22	21	19	21	19	19	21	22
a_1	99	101	23	124	127	80	104	68	257	255	236	145	134	111	134	108	96	128	151
a_0	162	168	15	240	252	100	140	96	770	756	672	264	264	189	240	180	144	240	330
b_2	0	1	2	0	0	0	7	1	2	0	1	1	1	4	1	3	2	3	4
b_1	8	5	4	3	2	6	5	2	4	3	1	2	2	1	2	5	3	4	9
b_0	7	6	8	4	5	6	8	5	6	5	2	3	3	2	3	6	7	1	2
c	2	1	4	1	2	3	4	5	3	7	8	6	4	3	5	9	8	2	5

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции САУ

Передаточная функция $W(p)$ линейной системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Значения коэффициентов a_j и b_j определяются табл. 3.1 в соответствии с номером варианта задачи.

Выполнить следующие задания:

1. Записать дифференциальное уравнение системы.
2. Найти корни характеристического уравнения системы.
3. Определить устойчивость системы по критерию Гурвица.
4. Вычислить импульсную переходную характеристику $w(t)$.
5. Найти корреляционную функцию сигнала на выходе системы, если на входе системы действует белый шум с корреляционной функцией $K(\tau) = C^2 \cdot \delta(\tau)$.

Коэффициент C задан в табл. 3.1.

3.2. Метод пространства состояний

1. Записать уравнения состояния системы, имеющей передаточную функцию $W(p)$, заданную в пункте 3.1, в стандартной и нормальной форме.

2. Изобразить блок-схему модели системы, представленной уравнениями состояния в стандартной и нормальной форме.

3. Найти решение уравнений состояния y(t) для обоих случаев, если

$$y(0) = C, \quad \dot{y}(t) = \ddot{y}(t) = 0.$$

Таблица 3.1

N вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_2	9	12	15	21	18	24	27	8	10	14	12	14	16	15	14	16	18	14	13
a_1	26	47	74	146	107	191	242	17	27	56	39	53	69	54	59	76	95	63	54
a_0	24	60	120	336	210	504	720	10	18	64	28	40	54	40	70	96	126	90	72
b_2	8	6	3	2	1	0	0	2	7	2	2	2	2	0	1	4	2	3	1
b_1	2	3	2	4	2	2	7	4	8	3	3	4	8	2	3	7	6	1	7
b_0	4	2	1	3	5	5	6	6	8	9	8	6	10	5	6	5	3	4	5
c	5	4	3	6	4	1	3	2	4	3	5	7	7	2	1	3	4	8	3
N вар.	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**
a_2	18	18	9	20	20	17	19	15	28	28	27	22	21	19	21	19	19	21	22
a_1	99	101	23	124	127	80	104	68	257	255	236	145	134	111	134	108	96	128	151
a_0	162	168	15	240	252	100	140	96	770	756	672	264	264	189	240	180	144	240	330
b_2	0	1	2	0	0	0	7	1	2	0	1	1	1	4	1	3	2	3	4
b_1	8	5	4	3	2	6	5	2	4	3	1	2	2	1	2	5	3	4	9
b_0	7	6	8	4	5	6	8	5	6	5	2	3	3	2	3	6	7	1	2
c	2	1	4	1	2	3	4	5	3	7	8	6	4	3	5	9	8	2	5

Пример. Передаточная функция линейной системы

$$W(p) = \frac{p^2+3p+6}{p^3+19p^2+108p+180}. \qquad (3.1)$$

Выполнить последовательность действий, указанных в 3.1 и 3.2.

Дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции (3.1), имеет вид

$$\underset{\alpha_3}{\dddot{y}(t)} + \underset{\alpha_2}{19\ddot{y}(t)} + \underset{\alpha_1}{108\dot{y}(t)} + \underset{\alpha_0}{180y(t)} = \underset{\beta_2}{\ddot{u}(t)} + \underset{\beta_1}{3\dot{u}(t)} + \underset{\beta_0}{6u(t)}, \qquad (3.2)$$

где $u(t)$ - входное воздействие; $y(t)$ - выходной сигнал.

Представим уравнение (3.2) в параметрах пространства состояний и решим его.

Стандартная форма уравнений состояния имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$
$$y = Cx + Du.$$

Здесь A - матрица Фробениуса. Это квадратная матрица, размер которой определяется порядком дифференциального уравнения. Элементы, стоящие над главной диагональю - единицы; элементы нижней строки - это коэффициенты левой части уравнения (3.2), взятые с противоположными знаками, все остальные элементы нулевые.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -180 & -108 & -19 \end{bmatrix}.$$

Для систем с одним входом и выходом D - одноэлементная матрица, B - вектор-столбец, элементы которых определяются по следующим соотношениям:

$D = b_0 = \beta_n$, где n - порядок системы.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} b_1 &= \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} b_0, \\ b_2 &= \beta_{n-2} - \alpha_{n-1} b_1 - \alpha_{n-2} b_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n &= \beta_0 - \alpha_{n-1} b_{n-1} - \alpha_{n-2} b_{n-2} - \ldots - \alpha_0 b_0. \end{aligned}$$

Матрица C - это вектор-строка, состоящая из n элементов, первый элемент - единица, остальные нули. C = [1 0 0 ... 0].

Для рассматриваемого примера

$$D = b_0 = \beta_3 = 0.$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} b_1 &= \beta_2 - \alpha_2 b_0 = 1, \\ b_2 &= \beta_1 - \alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_0 = -16, \\ b_3 &= \beta_0 - \alpha_2 b_2 - \alpha_1 b_1 - \alpha_0 b_0 = 202. \end{aligned}$$

$$C = [1\ 0\ 0].$$

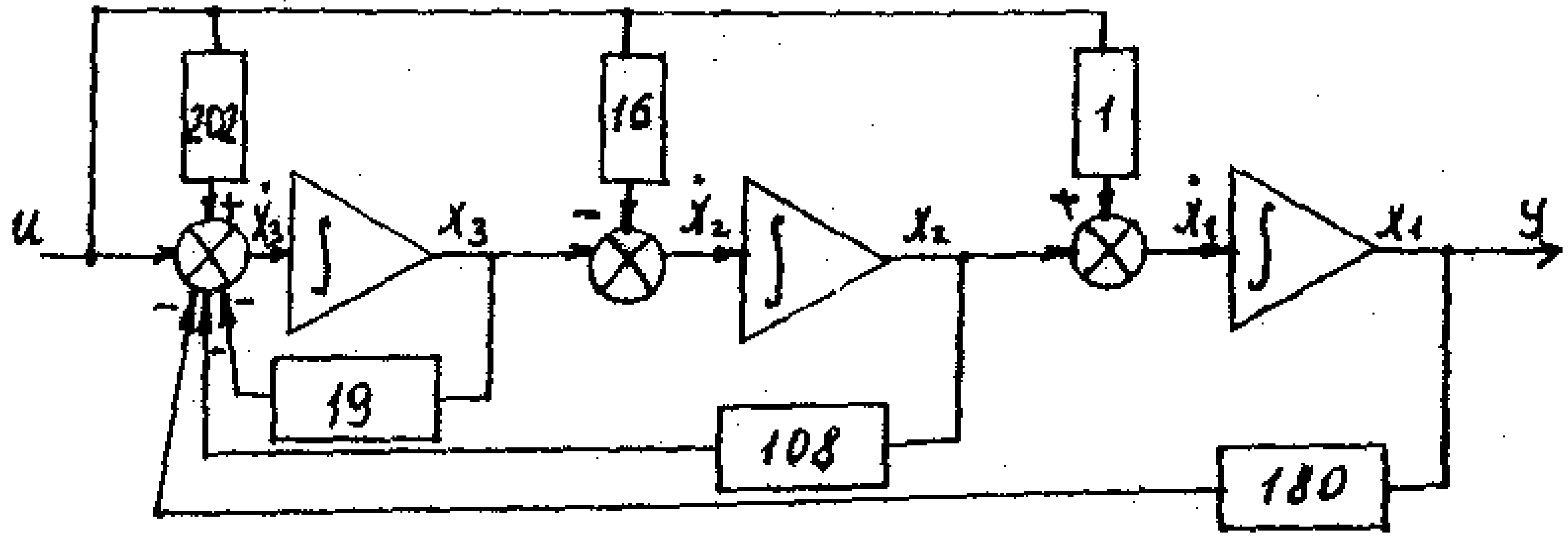
Отсюда

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -180 & -108 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -16 \\ 202 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = [\ 1\ 0\ 0\ ] \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + [\ 0\ ] \cdot U$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_3 - 16u, \\ \dot{x}_3 = -180x_1 - 108x_2 - 19x_3 + 202u, \\ y = x_1. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Блок-схема модели имеет вид:



Найдем решение системы уравнений (3.3), если начальные условия $\dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$, $y(0) = 9$.

Характеристическое уравнение системы имеет вид $|A-\lambda E|=0$, где E - единичная матрица.

Раскрывая определитель, получим

$$\lambda^3 + 19\lambda^2 + 108\lambda + 180 = 0 ,$$

тогда характеристические числа матрицы A (корни характеристического уравнения) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = -10$. Решение уравнений состояния можно записать в виде

$$x(t) = x_0 e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} Bu(t)e^{A(t-\tau)}\,d\tau$$

Здесь e^{At} - фундаментальная матрица или матрица перехода. Вычислим эту матрицу, представляя ее в виде ряда из n членов

$$e^{At} = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_{n-1}A^{n-1},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ - неизвестные коэффициенты.

Вычислить эти коэффициенты можно, решая систему из n уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \ldots \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \ldots \lambda_2^{n-1} \\ . & . & . \quad . \quad . \quad . \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 \ldots \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Для рассматриваемого примера

$$e^{At} = a_0E + a_1A + a_2A^2,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -6 & 36 \\ 1 & -10 & 100 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ e^{-6t} \\ e^{-10t} \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} a_0 - 3a_1 + 9a_2 = e^{-3t}, \\ a_0 - 6a_1 + 36a_2 = e^{-6t}, \\ a_0 - 10a_1 + 100a_2 = e^{-10t}. \end{cases}$$

Выражая из этой системы коэффициенты a_0, a_1, a_2, получим

$$a_0 = 2{,}86e^{-3t} - 2{,}5e^{-6t} + 0{,}64e^{-10t},$$

$$a_1 = 0{,}76e^{-3t} - 1{,}1e^{-6t} + 0{,}32e^{-10t},$$

$$a_2 = 0{,}05e^{-3t} - 0{,}08e^{-6t} + 0{,}04e^{-10t}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -180 & -109 & -19 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -180 & -108 & -19 \\ 3420 & 1872 & 253 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2{,}86 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}86 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}86 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} -2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}5 \end{bmatrix} e^{-6t} + \begin{bmatrix} 0{,}64 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}64 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}64 \end{bmatrix} e^{-10t}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0{,}76 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}76 \\ -136 & -82 & -14 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 & -1{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}1 \\ 194 & 117 & 20{,}5 \end{bmatrix} e^{-6t} + \begin{bmatrix} 0 & 0{,}32 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}32 \\ -57{,}6 & -34{,}6 & -6{,}1 \end{bmatrix} e^{-10t} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}05 \\ -8{,}46 & -5{,}08 & -0{,}89 \\ 160{,}7 & 87{,}98 & 11{,}9 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0{,}08 \\ 14{,}9 & 8{,}96 & 1{,}58 \\ -283{,}9 & -155{,}4 & -21 \end{bmatrix} e^{-6t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}04 \\ -6{,}5 & -3{,}9 & -0{,}7 \\ 123 & 67{,}4 & 9{,}1 \end{bmatrix} e^{-10t}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2{,}86 & 0{,}76 & 0{,}05 \\ -8{,}46 & -2{,}2 & -0{,}13 \\ 23{,}9 & 5{,}9 & 0{,}31 \end{bmatrix}}_{K} e^{-3t} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2{,}5 & -1{,}1 & -0{,}08 \\ 14{,}9 & 6{,}5 & 0{,}5 \\ -89{,}5 & -38{,}7 & -2{,}96 \end{bmatrix}}_{L} e^{-6t} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}64 & 0{,}32 & 0{,}04 \\ -6{,}48 & -3{,}25 & -0{,}36 \\ 65{,}5 & 32{,}8 & 3{,}67 \end{bmatrix}}_{N} e^{-10t}$$

$x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$, следовательно $x_1(0) = 9$, $x_2(0) = 0 = x_3$

$$x(t) = x'(t) + x''(t).$$

$$x'(t) = e^{At} \cdot x(0) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 25{,}74 \\ -76{,}41 \\ 215{,}5 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} -22{,}5 \\ 134{,}5 \\ -805{,}1 \end{bmatrix} e^{-6t} + \begin{bmatrix} 5{,}76 \\ -58{,}3 \\ 589{,}7 \end{bmatrix} e^{-10t}.$$

$$x''(t) = \int_0^t u(t) e^{A(t-\tau)} B \, d\tau, \text{ пусть } u(t) = 9 \cdot 1(t).$$

$$x''(t) = 9 \cdot K \cdot B \cdot \int_0^t e^{-3(t-\tau)} d\tau + 9 \cdot L \cdot B \cdot \int_0^t e^{-6(t-\tau)} d\tau +$$

$$+ 9 \cdot N \cdot B \cdot \int_0^t e^{-10(t-\tau)} d\tau = (1 - e^{-3t}) \begin{bmatrix} 2{,}4 \\ -15{,}39 \\ -23{,}1 \end{bmatrix} + (1 - e^{-6t}) \begin{bmatrix} -1{,}59 \\ 17{,}62 \\ -102 \end{bmatrix} +$$

$$+ (1 - e^{-10t}) \begin{bmatrix} 2{,}52 \\ -25{,}2 \\ 223{,}6 \end{bmatrix}.$$

Из полученных выражений находим

$$x_1(t) = 25{,}74e^{-3t} - 22{,}5e^{-6t} + 5{,}76e^{-10t} + 2{,}4 - 2{,}4e^{-3t} -$$
$$- 1{,}59 + 1{,}59e^{-6t} + 2{,}52 - 2{,}52e^{-10t} = 23{,}35e^{-3t} - 20{,}91e^{-6t} +$$
$$+ 2{,}52e^{-10t} + 4{,}05.$$

$$y(t) = x_1(t),$$
$$y(t) = 23{,}35e^{-3t} - 20{,}91e^{-6t} + 2{,}52e^{-10t} + 4{,}05.$$

Представим уравнения состояния в нормальной форме

$$\dot{q} = \Lambda q + B_1 u,$$
$$y = C_1 q + D_1 u.$$

Здесь Λ - диагональная матрица

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix},$$

$$q(t) = M^{-1} \cdot x(t); \quad B_1 = M^{-1} B; \quad C_1 = C \cdot M; \quad D_1 = D,$$

где M - модальная матрица.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -6 & -10 \\ 9 & 36 & 100 \end{bmatrix}.$$

Найдем M^{-1}, $\quad M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot Adj\, M.$

$Adj\, M$ - присоединенная матрица, это транспортированная матрица алгебраических дополнений.

Найдем алгебраические дополнения матрицы M:

$\Delta_{11} = -240, \quad \Delta_{12} = 210, \quad \Delta_{13} = -54,$

$\Delta_{21} = -64, \quad \Delta_{22} = 91, \quad \Delta_{23} = -27,$

$\Delta_{31} = -4, \quad \Delta_{32} = 7, \quad \Delta_{33} = -3.$

$$Adj\, M = \begin{bmatrix} -240 & -64 & -4 \\ 210 & 91 & 7 \\ -54 & -27 & -3 \end{bmatrix}; \quad \det M = -84.$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-84} \begin{bmatrix} -240 & -64 & -4 \\ 210 & 91 & 7 \\ -54 & -27 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,86 & 0,76 & 0,05 \\ -2,5 & -1,1 & -0,08 \\ 0,64 & 0,32 & 0,04 \end{bmatrix}.$$

$$B_1 = M^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 2,86 & 0,76 & 0,05 \\ -2,5 & -1,1 & -0,08 \\ 0,64 & 0,32 & 0,04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -16 \\ 202 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ -1,06 \\ 3,6 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C \cdot M = [1\ 0\ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -6 & -10 \\ 9 & 36 & 100 \end{bmatrix} = [1\ 1\ 1]$$

$$D_1 = D = [\ 0\ ].$$

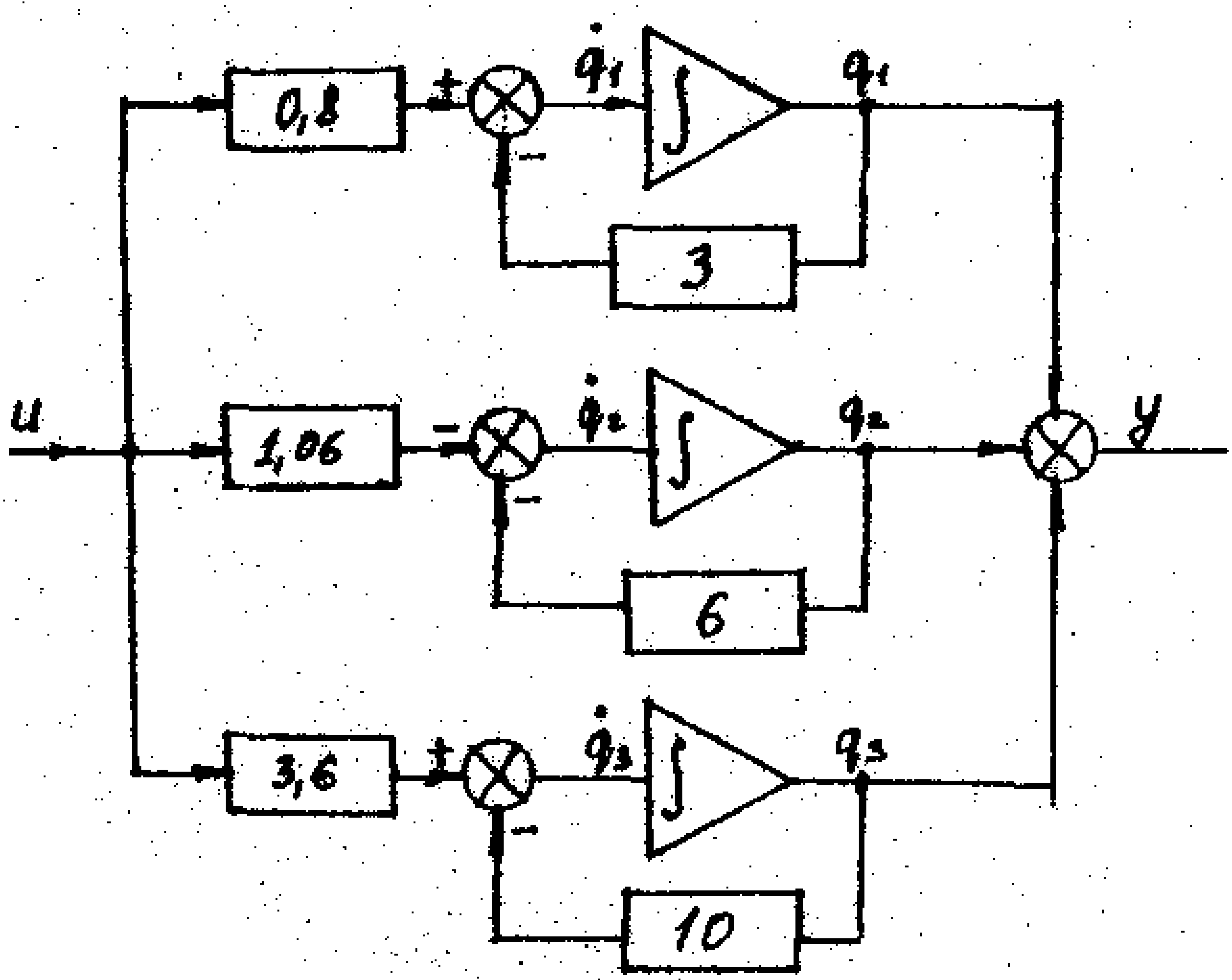
Отсюда получаем

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,8 \\ -1,06 \\ 3,6 \end{bmatrix} \cdot U;$$

$$y = [\ 1\ 1\ 1\ ] \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + [\ 0\ ]\ U;$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -3q_1 + 0,8\ U, \\ \dot{q}_2 &= -6q_2 - 1,06\ U, \\ \dot{q}_3 &= -10q_3 + 3,6\ U, \\ y &= q_1 + q_2 + q_3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Блок-схема модели имеет вид:



Найдем решение системы (3.4).

Начальные условия:

$y(0) = 9, \quad \ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = 0; \quad U(t) = 9\cdot 1(t).$

Так как $q = M^{-1}\cdot X$, то

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{bmatrix} = M^{-1}\cdot \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \\ X_3(0) \end{bmatrix}. \qquad \begin{aligned} X_1(0) &= y(0) = 9, \\ X_2(0) &= \dot{y}(0) = 0, \\ X_3(0) &= \ddot{y}(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}86 & 0{,}76 & 0{,}05 \\ -2{,}5 & -1{,}1 & -0{,}08 \\ 0{,}64 & 0{,}32 & 0{,}04 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25{,}74 \\ -22{,}5 \\ 5{,}76 \end{bmatrix}.$$

$$q(t) = q_0 e^{\lambda t} + \int_0^t B_1 u(t) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau.$$

$$q_1(t) = 25{,}74\, e^{-3t} + 0{,}8\cdot 9 \int_0^t e^{-3(t-\tau)} d\tau = 23{,}35 e^{-3t} + 2{,}4;$$

$$q_2(t) = -22{,}5 e^{-6t} - 1{,}6\cdot 9 \int_0^t e^{-6(t-\tau)} d\tau = -20{,}91 e^{-6t} - 1{,}59;$$

$$q_3(t) = 5{,}76\, e^{-10t} + 3{,}6\cdot 9 \int_0^t e^{-10(t-\tau)} d\tau = 2{,}52\, e^{-10t} + 3{,}24;$$

$$y(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) =$$

$$= 4{,}05 + 23{,}35 e^{-3t} - 20{,}91 e^{-6t} + 2{,}52\, e^{-10t}.$$

Найдем корреляционную функцию сигнала на выходе системы, если на входе действует белый шум с автокорреляционной функцией вида:

$$K_u(\tau) = 9^2\cdot \delta(\tau) = 81\cdot \delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция.

$$K_y(\tau)=\int_0^\infty w(\tau_1)\,d\tau_1\int_0^\infty w(\tau_2)K_u(\tau+\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2 .$$

Здесь $w(\tau)$ - импульсная переходная характеристика системы. Для нахождения w(t) представим передаточную функцию w(p) следующим образом:

$$W(p)=\frac{p^3+3p+6}{p^3+19p^2+108p+180}=\frac{a}{p+3}+\frac{b}{p+6}+\frac{c}{p+10}.$$

Найдем a, b, с.

$$p^2+3p+6=(a+b+c)p^2+(16a+13b+9c)p+(60a+30b+18c),$$

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ 16a+13b+9c=3, \\ 60a+30b+18c=6, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a&=0,3, \\ b&=-2, \\ c&=2,7. \end{aligned}$$

$$w(t)=0,3e^{-3t}-2e^{-6t}+2,7e^{-10t};$$

$$K_y(\tau)=\int_0^\infty 0,3e^{-3\tau_1}d\tau_1\int_0^\infty 0,3e^{-3\tau_2}\cdot 81\cdot\delta(\tau+\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2-$$

$$-\int_0^\infty 2e^{-6\tau_1}d\tau_1\int_0^\infty 2e^{-6\tau_2}\cdot 81\cdot\delta(\tau+\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2+\int_0^\infty 2,7e^{-10\tau_1}d\tau_1\times$$

$$\times\int_0^\infty 2,7e^{-10\tau_2}\cdot 81\cdot\delta(\tau+\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2=7,29\int_0^\infty e^{-3\tau_1}\cdot e^{-3(\tau+\tau_1)}d\tau_1+$$

$$+324\int_0^\infty e^{-6\tau_1}\cdot e^{-6(\tau+\tau_1)}d\tau_1+540,49\int_0^\infty e^{-10\tau_1}\cdot e^{-10(\tau+\tau_1)}d\tau_1=$$

$$=1,215e^{-3\tau}+27e^{-6\tau}+29,52e^{-10\tau}.$$

4. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

4.1. Линейное программирование

В каждом из пунктов 4.1...4.38 приведены условия задач линейного программирования. Необходимо последовательно выполнить следующие действия:

1. Найти оптимальный план x^* и экстремальное значение функции F(x).

2. Построить задачу, двойственную к исходной, решить ее и сравнить решения прямой и двойственной задач.

3. Если решение задачи не является целочисленным, получить целочисленное решение путем введения дополнительных ограничений по методу Гомори.

4.1.

$$F(x) = -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 2x_5 \ (max),$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 \le 12,$$
$$5x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \ge 10,$$
$$2x_2 + 3x_5 \le 15,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

4.2.

$$F(x) = -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \ (max),$$
$$-2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 3,$$
$$x_1 - x_3 \le 4,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

4.3.

$$F(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ (max),$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 13,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

4.4.

$$F(x) = x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ (min),$$
$$-4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 6,$$
$$2x_2 + x_3 + 3x_4 \ge 10,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

4.5.

$$F(x) = -5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \ (max),$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 7,$$
$$3x_2 - x_3 + 4x_4 \le 7,$$
$$x_2 + x_3 + 8x_4 \le 12,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

4.6.

$$F(x) = 8x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ (max),$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4,$$
$$2x_1 + x_3 - 3x_4 \le 3,$$
$$3x_1 - x_3 + 6x_4 \le 6,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

4.7.

$$F(x) = 9x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 \ (max),$$
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 12,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 17,$$
$$x_1 - 3x_2 + x_4 = 3,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

4.8.

$$F(x) = x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 \ (max),$$
$$6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \le 20,$$
$$4x_1 + 3x_2 + x_4 \le 12,$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \le 6,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

4.9.

$$F(x)=x_1+3x_2-x_3+2x_4\ (min),$$
$$x_1+2x_2-2x_3+x_4=4,$$
$$3x_1-x_2+x_3-x_4\geq 3,$$
$$x_1-x_3+2x_4\leq 7,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,4}.$$

4.10.

$$F(x)=4x_1+3x_2+4x_3+x_4-x_5\ (max),$$
$$x_1+2x_2+x_3-x_4=8,$$
$$2x_1+x_2-2x_3-2x_5=14,$$
$$x_2-x_3+2x_4=8,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,5}.$$

4.11.

$$F(x)=2x_1+12x_2+10x_3+3x_4\ (min),$$
$$-8x_1+8x_2+5x_3\geq 4,$$
$$x_1+2x_2-4x_3+x_4\geq 5,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,4}$$

4.12.

$$F(x)=-2x_1+x_2-x_3+3x_4\ (min),$$
$$3x_1+2x_2+x_4+x_5=18,$$
$$x_1-2x_2+3x_3\geq -8,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,5}$$

4.13.

$$F(x)=x_1-3x_2-2x_3-3x_4\ (max),$$
$$x_1-5x_2+3x_3+3x_4\leq -1,$$
$$x_1+2x_2+3x_3-x_4\leq 2,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,4}$$

4.14.

$$F(x)=6x_1+4x_2+7x_3+5x_4\ (max),$$
$$2x_1+x_2+x_3+3x_4\leq 30,$$
$$3x_1+x_2+2x_3+3x_4\leq 20,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,4}.$$

4.15.

$$F(x)=x_1+2x_2+x_3+3x_4-2x_5\ (max),$$
$$x_1+7x_2-x_3+7x_4-8x_5\leq 9,$$
$$x_2+8x_3+9x_4+7x_5\leq 25,$$
$$2x_2+3x_3+x_4+x_5\geq 3,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,5}.$$

4.16.

$$F(x)=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\ (min),$$
$$x_1+x_2+2x_3=4,$$
$$-2x_2-2x_3+x_4-x_5=-6,$$
$$x_1-x_2+6x_3+x_4=12,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,5}.$$

4.17.

$$F(x)=x_1+x_2+x_3+x_4\ (max),$$
$$x_1+3x_2+x_3+2x_4\geq 3,$$
$$x_1+x_2-x_3+x_4\geq 1,$$
$$x_1-x_2+x_3+x_4\leq 1,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,4}.$$

4.18.

$$F(x)=2x_1+x_2+3x_3+x_4\ (max),$$
$$x_1+x_2+2x_3+x_4=5,$$
$$3x_1+x_2+3x_3+2x_4\leq 9,$$
$$x_2+x_3+2x_4\leq 6,$$
$$x_i\geq 0,\ i=\overline{1,4}.$$

4.19.

$F(x)=4x_1+2x_2+x_3+5x_4\ (min),$
$x_1+2x_2-4x_3+x_4\geqslant 6,$
$-x_1+3x_2+2x_4\geqslant 4,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=\overline{1,4}.$

4.20.

$F(x)=5x_1+3x_2+4x_3\ (max),$
$x_1+x_2+x_3\leqslant 8,$
$3x_1-x_2+2x_3\geqslant 10,$
$x_1+2x_2+3x_3\geqslant 12,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3.$

4.21.

$F(x)=2x_1+x_2+5x_3+8x_4\ (min),$
$5x_1+4x_2+3x_3-x_4\leqslant 10,$
$2x_1+x_2+4x_3+8x_4=3,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=\overline{1,4}.$

4.22.

$F(x)=2x_1+4x_2+5x_3+x_4\ (min),$
$x_1-x_2+2x_3+x_4\geqslant 8,$
$3x_1+4x_3\geqslant 5,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=\overline{1,4}.$

4.23.

$F(x)=-2x_1+3x_2+x_3\ (max),$
$x_1+x_2+x_3\geqslant 6,$
$-2x_1+3x_2+3x_3\leqslant 7,$
$-2x_1-x_2+2x_3\leqslant 4,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3.$

4.24.

$F(x)=3x_1+8x_2+5x_3\ (max),$
$x_1+3x_2\leqslant 4,$
$x_1+2x_3\leqslant 7,$
$x_1+3x_2+2x_3\leqslant 12,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3.$

4.25.

$F(x)=4x_1+9x_2+2x_3\ (min),$
$2x_1+3x_2+2x_3\geqslant 14,$
$x_1+3x_2+x_3\geqslant 6,$
$5x_1+9x_2+2x_3\geqslant 20,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3.$

4.26.

$F(x)=4x_1+3x_2-10x_3+5x_4\ (min),$
$x_1+x_2-5x_3+x_4\geqslant 8,$
$2x_1+x_3-x_4\geqslant -2,$
$-x_2-3x_3+6x_4\geqslant 4,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3.$

4.27.

$F(x)=5x_1-4x_2+6x_3\ (max),$
$x_1+x_2+x_3\leqslant 6,$
$2x_1-x_2+3x_3\geqslant 9,$
$3x_1+x_1+2x_3\geqslant 11,$
$x_1\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0$

4.28.

$F(x)=10x_1+2x_2+5x_3\ (min),$
$5x_1+x_2+10x_3\geqslant 6,$
$2x_1+14x_2-x_3\geqslant 1,$
$x_1+2x_2+x_3\geqslant 2,$
$-3x_1+x_2+5x_3\leqslant 4,$
$x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3.$

4.29

$$F(x)=-2x_1+x_2-4x_3+6x_4 \ (max),$$
$$x_1+2x_2+3x_3+5x_4\le 20,$$
$$3x_1-x_2-5x_3+10x_4\le 10,$$
$$x_1+7x_2+x_3+x_4\le 4,$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

4.30.

$$F(x)=x_1+10x_2-x_3+5x_4 \ (max),$$
$$x_1+2x_2-x_3-x_4=2,$$
$$-x_1+2x_2+3x_3+x_4=2,$$
$$x_1+5x_2+x_3-x_4=5,$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

4.31.

$$F(x)=16x_1-34x_2-7x_3+12x_4 \ (min),$$
$$x_1+3x_2-2x_3+2x_4\le 14,$$
$$-x_1+4x_2+x_3=4,$$
$$-4x_1+3x_2+6x_3+x_4\le 27,$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}$$

4.32.

$$F(x)=3x_1+5x_2+4x_3 \ (max),$$
$$3x_1+4x_2+2x_3\le 9,$$
$$2x_1+5x_2+x_3\le 8,$$
$$x_1+2x_2+4x_3\ge 7,$$
$$x_i\ge 0,\ i=1,2,3.$$

4.33.

$$F(x)=x_1+4x_2+x_3 \ (min),$$
$$5x_1+12x_2+2x_3=9,$$
$$3x_1+4x_2+4x_3=11,$$
$$x_i\ge 0,\ i=1,2,3.$$

4.34.

$$F(x)=13x_1-9x_2+2x_3+3x_4 \ (max),$$
$$x_1-x_2+x_4-3x_3\le 2,$$
$$4x_1+x_2-x_3+2x_4=8,$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}$$

4.35.

$$F(x)=12x_1+27x_2+6x_3 \ (min),$$
$$2x_1+3x_2+2x_3\ge 14,$$
$$x_1+3x_2+x_3\ge 6,$$
$$6x_1+9x_2+2x_3\ge 22,$$
$$x_i\ge 0,\ i=1,2,3$$

4.36.

$$F(x)=x_1+2x_2-x_3+x_4 \ (min),$$
$$2x_1+x_2-2x_3+x_4=2,$$
$$x_1-2x_2+x_3-x_4\ge 3,$$
$$x_1-x_3\le 4,$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

4.37.

$$F(x)=2x_1+3x_2+4x_3 \ (max),$$
$$x_1+2x_2+x_3\le 7,$$
$$2x_1-x_2+3x_3\ge 10,$$
$$4x_1+2x_2+x_3\ge 15,$$
$$x_i\ge 0,\ i=1,2,3.$$

4.38.

$$F(x)=x_1+2x_2+x_3-3x_4 \ (max),$$
$$-x_1+2x_2+x_4\le 8,$$
$$2x_1+x_3=11,$$
$$4x_1+x_2\ge 10,$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}$$

4.2.1. Экстремальные задачи без ограничений. Методы прямого поиска для функции n переменных. Найти экстремальное значение функции в задачах 4.39...4.56, используя: а) метод Хука-Дживса; б) метод наискорейшего спуска; в) метод Ньютона-Рафсона. Оптимизационный процесс начинать с указанной точки x^0.

4.39. $F(x)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-4x_1+3$ (min), $x^0=(1,1)$.

4.40. $F(x)=4x_1^2+x_2^2-4x_1-2x_2$ (max), $x^0=(1,3)$.

4.41. $F(x)=(x_1^2+x_2-11)^2+(x_1+x_2^2-7)^2$ (min), $x^0=(2,0)$.

4.42. $F(x)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1-2x_2$ (min), $x^0=(2,1)$.

4.43. $F(x)=10x_1+10x_2-5x_2^2+3x_1x_2$ (max), $x^0=(0,0)$.

4.44. $F(x)=2x_1x_2+2x_1-x_1^2-x_2^2$ (max), $x^0=(1,3)$.

4.45. $F(x)=5x_1+5x_2-x_1^2-x_2^2+4x_1^2x_2$ (min), $x^0=(2,3)$.

4.46. $F(x)=x_1^2+x_2^2-6x_1-4x_2+20x_1x_2$ (min), $x^0=(1,1)$

4.47. $F(x)=4x_1x_2+x_1^2-5x_2-x_2^2$ (max), $x^0=(3,0)$.

4.48. $F(x)=2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+3x_1$ (min), $x^0=(1,2)$.

4.49. $F(x)=2x_1^2-5x_1x_2+4x_2+x_2^2$ (min), $x^0=(1,5)$.

4.50. $F(x)=-x_2^2-2x_1^2+x_2+3x_1x_2$ (max), $x^0=(2,1)$.

4.51. $F(x)=-2x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2$ (max), $x^0=(3,2)$.

4.52. $F(x)=8x_1-6x_2-x_1^2-x_2^2+4x_1x_2$ (max), $x^0=(3,0)$.

4.53. $F(x)=(x_1^2-x_2+1)^2+(x_2-2)^2$ (min), $x^0=(1,1)$.

4.54. $F(x)=-2x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2$ (max), $x^0=(2,2)$.

4.55. $F(x)=2x_1^2-2x_1x_2-x_2^2-4x_1-2x_2$ (min), $x^0=(2,1)$.

4.56 $F(x)=3x_2^2+x_1^2-4x_1x_2+5x_1$ (min), $x^0=(1,1)$.

4.2.2. Экстремальные задачи с ограничениями. В каждой из задач 4.57...4.90 приведена квадратичная функция цели F(x) и система линейных ограничений, определяющая область допустимых значений переменных (ОДЗП) задачи максимизации. Выполнить следующие действия:

1. Записать условия теоремы Куна-Таккера для указанной задачи квадратичного программирования.

2. Решить задачу, используя метод допустимых направлений Зойтендейка.

3. Решить задачу методом штрафных функций.

4.57.

$$F(x)=2x_1-3x_2-\frac{1}{2}x_1^2-x_2^2+5x_1x_2$$
$$3x_1+x_2\le 3,$$
$$x_1+2x_2\le 2,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.58.

$$F(x)=-5x_1+7x_2-3x_1^2-x_2^2+2x_1x_2,$$
$$x_1\le 3,\ x_2\le 6,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.59.

$$F(x)=6x_1+3x_2-4x_1x_2-2x_1^2-3x_2^2,$$
$$2x_1+3x_2\le 6,$$
$$x_1+x_2\le 1,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.60.

$$F(x)=(x_1-2)^2+4(x_2-6)^2,$$
$$6x_1+3x_2\ge 10,$$
$$x_1+x_2\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.61.

$$F(x)=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2+x_1+x_2,$$
$$3x_1+x_2\le 3,$$
$$5x_1-3x_2\le 5,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.62.

$$F(x)=(x_1-x_2)^2+7x_1+6x_2,$$
$$x_1+x_2\ge 2,$$
$$x_1+2x_2\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.63.

$$F(x)=3x_1+x_2+(x_1+2x_2)^2,$$
$$x_1+x_2\le 6,$$
$$x_2\le 3,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.64.

$$F(x)=(x_1-2)^2+(x_1+4x_2)^2,$$
$$x_1+x_2\ge 1,$$
$$x_1+3x_2\le 6,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.65.

$$F(x)=-2x_1+9x_2-x_1^2-4x_2^2+5x_1x_2,$$
$$x_1-x_2\ge 0,$$
$$x_2\le 5,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.66.

$$F(x)=\frac{11}{2}x_1-\frac{1}{6}x_2-x_1^2-\frac{2}{3}x_2^2+\frac{1}{2}x_1x_2,$$
$$2x_1-x_2\le 2,$$
$$-x_1+2x_2\le 2,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.67.

$$F(x)=3x_1-7x_2-2x_1^2-3x_2^2+2x_1x_2,$$
$$5x_1+2x_2\le 10,$$
$$-2x_1+x_2\le 2,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.68.

$$F(x)=-x_1^2-x_2^2+6x_1x_2+7x_1,$$
$$x_1+x_2\le 3,$$
$$x_1-x_2\le 1,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

4.69.

$$F(x)=-x_1+6x_2-x_1^2-3x_2^2+4x_1x_2,$$
$$4x_1+3x_2\le 12,$$
$$2x_1-x_2\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.70.

$$F(x)=4x_1^2+8x_2-\frac{3}{2}x_2^2+5x_1x_2,$$
$$3x_1+6x_2\le 18,$$
$$x_1-4x_2\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.71.

$$F(x)=14x_1+10x_2-x_1^2-x_2^2-x_1x_2,$$
$$-3x_1+2x_2\le 6,$$
$$x_1+x_2\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.72.

$$F(x)=-x_1+5x_2-x_1^2-2x_2^2+x_1x_2,$$
$$x_1+x_3\le 6,$$
$$x_1\le 3,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.73.

$$F(x)=-6x_1+18x_2-2x_1^2-3x_2^2+x_1x_2,$$
$$2x_1-x_2\le 2,$$
$$3x_1+4x_2\le 12,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.74.

$$F(x)=x_1+10x_2-x_1^2+3x_2^2-x_1x_2,$$
$$2x_1+3x_2\le 6,$$
$$-2x_1+x_2\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

4.75.

$$F(x)=24x_1+14x_2-2x_1^2-x_2^2-4x_1x_2,$$
$$2x_1+4x_2\le 9,$$
$$x_1-2x_2\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.76.

$$F(x)=23x_2-x_1^2-2x_2^2+3x_1x_2,$$
$$5x_1+4x_2\le 20,$$
$$x_1-x_2\le 2,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

4.77.

$$F(x)=10x_1-8x_2-3x_1^2-2x_2^2+x_1x_2,$$
$$-x_1+x_2\le -3,$$
$$2x_1+5x_2\le 20,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.78.

$$F(x)=5x_2-7x_1+9x_2^2+6x_1x_2,$$
$$3x_1+2x_2\ge 6,$$
$$x_1+x_2\le 7,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

4.79.

$$F(x)=4x_1+4x_2-3x_1^2-x_1^2+2x_1x_2,$$
$$3x_1+4x_2\le 12,$$
$$x_1-2x_2\le 2$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.80.

$$F(x)=8x_1+6x_2-2x_1^2-x_2^2,$$
$$3x_1+2x_2<6,$$
$$-x_1+x_2\le 1,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.81.

$$F(x)=18x_1+12x_2-2x_1^2-x_1^2-2x_1x_2,$$
$$x_1+x_2\le 5,$$
$$2x_1+x_2\ge 2,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.82.

$$F(x)=8x_1+12x_2-x_1^2-2x_2^2,$$
$$2x_1+x_2\ge 4,$$
$$2x_1+5x_2\le 10,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.83.

$$F(x)=2x_1+2x_2-x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2,$$
$$-x_1+x_2\le 2,$$
$$3x_1+4x_2\le 12,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.84.

$$F(x)=12x_2-2x_1^2-3x_2^2+2x_1x_2,$$
$$-x_1+2x_2\le 2,$$
$$x_1\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.85.

$$F(x)=11x_1-3x_2-x_1^2-4x_2^2+x_1x_2,$$
$$2x_1-x_2\le 2,$$
$$-x_1+2x_2\le 4;$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.86.

$$F(x)=6x_1-x_2^2-\frac{3}{2}x_1^2+2x_1x_2,$$
$$-3x_1+2x_2\le 0,$$
$$4x_1+3x_2\le 12,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.87.

$$F(x)=3x_1-2x_2-x_1^2-x_2^2+2x_1x_2,$$
$$x_1+x_2\le 3,$$
$$x_1-x_2\le 1,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.88.

$$F(x)=8x_2-x_1^2-3x_2^2+5x_1x_2.$$
$$2x_1+x_2\ge 2;$$
$$x_1+x_2\le 5,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.89.

$$F(x)=-5x_1+6x_2-x_1^2+3x_2^2+x_1x_2,$$
$$x_1-x_2\le 1,$$
$$3x_1+5x_2\le 15,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.90.

$$F(x)=12x_1+4x_2-x_1^2-3x_2^2,$$
$$x_1+x_2\le 6,$$
$$-x_1+x_2\le -1,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4.2.3. Методы линеаризации для задач условной оптимизации. Решить задачи 4.91...4.102 одним из следующих методов:

- отсекающих плоскостей (алгоритм Келли);
- линейных комбинаций (алгоритм Франка-Вульфа);
- сепарабельного программирования.

4.91.

$$F(x)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2\ (min),$$
$$10x_1-x_2\geq 2,$$
$$x_1+x_2\leq 3,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

4.92.

$$F(x)=\frac{1}{3}(x_1-3)^3-x_2\ (min),$$
$$1\leq x_1\leq 3,$$
$$0\leq x_2\leq 2.$$

4.93

$$F(x)=2x_1-3(x_2-4)^2\ (min),$$
$$x_1^2+x_2^2\leq 10,$$
$$x_1^2+(x_2-4)^2\leq 9,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.94.

$$F(x)=x_1+x_2^2\ (max),$$
$$x_1^2+x_2^2\leq 25,$$
$$x_1^2-x_2\leq 9,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.95.

$$F(x)=-x_1-x_2\ (min),$$
$$25-x_1^2-x_2^2\geq 0,$$
$$9-2x_1-x_2\geq 0,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.96.

$$F(x)=x_1^4+2x_2+x_3^2\ (min),$$
$$x_1+x_2^2+x_3\leq 4,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.97.

$$F(x)=x_1^2+4x_2^2-5x_2\ (min),$$
$$x_1^2+x_2^2\leq 9,$$
$$x_1+3x_2\geq 5,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.98.

$$F(x)=-x_1^2-x_2^2+4x_2+8x_1\ (max),$$
$$x_1^2-x_2\geq 0,$$
$$x_1+x_2\geq 7,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.99.

$$F(x)=6x_2+12x_2-2x_1^2-x_2^2\ (max),$$
$$x_1+x_2\geq 2,$$
$$x_1+x_2^2\leq 15,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.100.

$$F(x)=x_1^2-6x_1+x_2^2-6x_2\ (max),$$
$$x_1+x_2\leq 7,$$
$$x_1^2+x_2^2\geq 10,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.101.

$$F(x)=4x_1+x_2^2-16x_1-4x_2\ (min),$$
$$x_1^2+x_2\geq 4,$$
$$x_1^2-x_2^2\geq 2,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

4.102.

$$F(x)=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2\ (min),$$
$$3x_1+x_2\leq 3,$$
$$5x_1-3x_2\leq 15,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

Пример. Найти экстремальное значение функции: а) методом наискорейшего спуска (подъема), б) методом Ньютона-Рафсона.

$$F(x) = 11x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2\ (max); \quad x^0 = [1, 2].$$

Точность решения $\varepsilon \leq 0,01$.

Очередная точка при поиске максимума функции вычисляется по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k \nabla F(x^k),$$

где направление движения задается вектором градиента $\nabla F(x)$ функции $F(x)$ в точке x^k, а величина шага перемещения определяется числовым параметром α^k.

$$\nabla F(x) = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right] = [11 - 4x_1 - x_2, 8 - 2x_2 - x_1].$$

$$\nabla F(x^0) = [5, 3]$$

Осуществляем движение из точки x^0 вдоль градиента $\nabla F(x^0)$ в новую точку x^1

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} + \alpha^0 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha^0 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 5\alpha^0 \\ 2 + 3\alpha^0 \end{bmatrix}.$$

Величина λ^k на любом шаге выбирается из условия обеспечения экстремума функции в рассматриваемом направлении.

Подставляя координаты точки x^1 в функцию $F(x)$, получим

$$F(\alpha^0) = 11(1+5\alpha^0) + 8(2+3\alpha^0) - 2(1+5\alpha^0)^2 - (2+3\alpha^0)^2 - (1+5\alpha^0)(2+3\alpha) = 19 + 34\alpha^0 - 74(\alpha^0)^2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^0} = 34 - 148\alpha^0 = 0; \quad \alpha^0 = 0,2297.$$

В результате после первого шага координаты очередной точки получаются равными

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 5 \cdot 0,2297 \\ 2 + 3 \cdot 0,2297 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,1485 \\ 2,6891 \end{bmatrix}.$$

Второй шаг.

$$\nabla F(x^1) = [-0{,}2831;\ 0{,}4733].$$

Составляющие вектора градиента достаточно велики, поэтому продолжим поиск

$$x^2 = x^1 + \alpha^1 \nabla F(x).$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}1485 - 0{,}2831\alpha^1 \\ 2{,}6891 + 0{,}4733\alpha^1 \end{bmatrix},$$

$$F(\alpha^1) = 22{,}905 + 0{,}3042\alpha^1 - 0{,}2503(\alpha^1)^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = -0{,}5006\alpha^1 + 0{,}3042; \quad \alpha^1 = 0{,}6076;$$

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}9765 \\ 2{,}9767 \end{bmatrix},$$

$$\nabla F(x^2) = [0{,}1173;\ 0{,}0701].$$

Третий шаг.

$$\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}9765 + 0{,}1173\alpha^2 \\ 2{,}9767 + 0{,}0701\alpha^2 \end{bmatrix},$$

$$F(\alpha^2) = 22{,}9758 + 0{,}0187(\alpha^2) - 0{,}04065(\alpha^2)^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = -0{,}0813\alpha^2 + 0{,}0187; \quad \alpha^2 = 0{,}2297;$$

$$\begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0034 \\ 2{,}9928 \end{bmatrix},$$

$$\nabla F(x^3) = [-0{,}0064;\ 0{,}011].$$

Четвертый шаг.

$$\begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}0034 - 0{,}0064\alpha^3 \\ 2{,}9928 + 0{,}011\alpha^3 \end{bmatrix}$$

$$F(\alpha^3) = 22{,}9999 + 0{,}0001619(\alpha^3) - 0{,}00013252(\alpha^3)^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0{,}000169 - 2\cdot 0{,}00013252 \quad ; \alpha^3 = 0{,}6111;$$

$$\begin{bmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}9995 \\ 2{,}9995 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(x^4) = [0{,}0025;\ 0{,}0015] .$$

Заданная точность достигнута, так как $\|\nabla F(x^4)\| < \varepsilon$

$F_{max} = 23.$

Решим эту задачу методом Ньютона-Рафсона. Очередная точка вычисляется в соответствии с выражением

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k)\cdot \nabla F(x^k),$$

где $H(x)$ - матрица Гессе функции $F(x)$; $H^{-1}(x)$ - обратная по отношению к $H(x)$ матрица.

$$\nabla F(x) = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}\right] = [11 - 4x_1 - x_2,\ 8 - 2x_2 - x_1]$$

$$\nabla F(x^0) = [5,\ 3].$$

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{\det H}\cdot Adj H,$$

где $\det H$ - определитель матрицы H; $Adj H$ - присоединенная к H матрица (транспонированная матрица алгебраических дополнений).

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы H

$A_{11} = -2;\quad A_{12} = 1;\quad A_{21} = 1;\ A_{22} = -4.$

Тогда

$$Adj H = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{10}{7} + \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} - \frac{12}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla F(x^1) = [+11 - 8 - 3,\ 8 - 6 - 2] = [0, 0].$$

Следовательно, в точке x^1 функция $F(x)$ достигает максимума

$F_{max} = 23.$

Пример. Максимизировать $F(x) = 11x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2$ при ограничениях

$$x_1 - x_2 \le 0,$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$X^0 = [1, 2]$.

1. Находим направление градиента в точке X^0

$\nabla F(x^0) = [11 - 4x_1 - x_2;\ 8 - 2x_2 - x_1] = [5, 3]$.

2. Координаты очерёдной точки поиска $X^{k+1} = X^k + \alpha^k \nabla F(X^k)$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 5\alpha^0 \\ 2 + 3\alpha^0 \end{bmatrix}$$

3. Определим промежуток допустимых значений для параметра α^0, при которых точка X^1 будет принадлежать области допустимых значений переменных (ОДЗП). Для этого подставим координаты точки X^1 в ограничения

$$\begin{cases} (1 + 5\alpha^0) - (2 + 3\alpha^0) \le 0 \\ 3 + 15\alpha^0 + 8 + 12\alpha^0 \le 12 \\ 1 + 5\alpha^0 \ge 0 \\ 2 + 3\alpha^0 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^0 \le 0{,}5 \\ \alpha^0 \le 0{,}03704 \\ \alpha^0 \ge -0{,}2 \\ \alpha^0 \ge -0{,}6667 \end{cases}$$

Выбираем наиболее сильные из полученных условий, тогда

$$-0{,}2 \le \alpha^0 \le 0{,}03704.$$

4. Найдем величину α^0, которая обеспечивает максимум функции $F(x)$.

$$F(\alpha^0) = 19 + 34\alpha^0 - 74(\alpha^0)^2,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^0} = 34 - 148\alpha^0 = 0, \qquad \alpha^0 = 0{,}2297.$$

Найденная величина α^0 не принадлежит интервалу, определенному в п. 3, поэтому принимаем $\alpha^0 = 0{,}03704$. При этом очередная точка поисковой траектории оказывается на границе области и находится на прямой, соответствующей неравенству

$$3x_1 + 4x_2 \le 12.$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5\cdot 0,03704 \\ 2+3\cdot 0,03704 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1852 \\ 2,1111 \end{bmatrix} .$$

$\nabla F(x^1) = [4,1411;\ 2,5926]$.

5. Движение в направлении $\nabla F(x^1)$ выводит за пределы ОДЗП. Поэтому очередную точку поиска вычислим по выражению

$$x^{K+1} = x^K + \alpha^K S^K ,$$

где S^K – направление движения к точке экстремума на K-м шаге;

α^K – параметр, определяющий величину шага.

Направление S^K выбирается так, чтобы очередная точка принадлежала ОДЗП, а функция цели при переходе к очередной точке увеличивалась максимальным образом. Направление S^K должно являться решением задачи

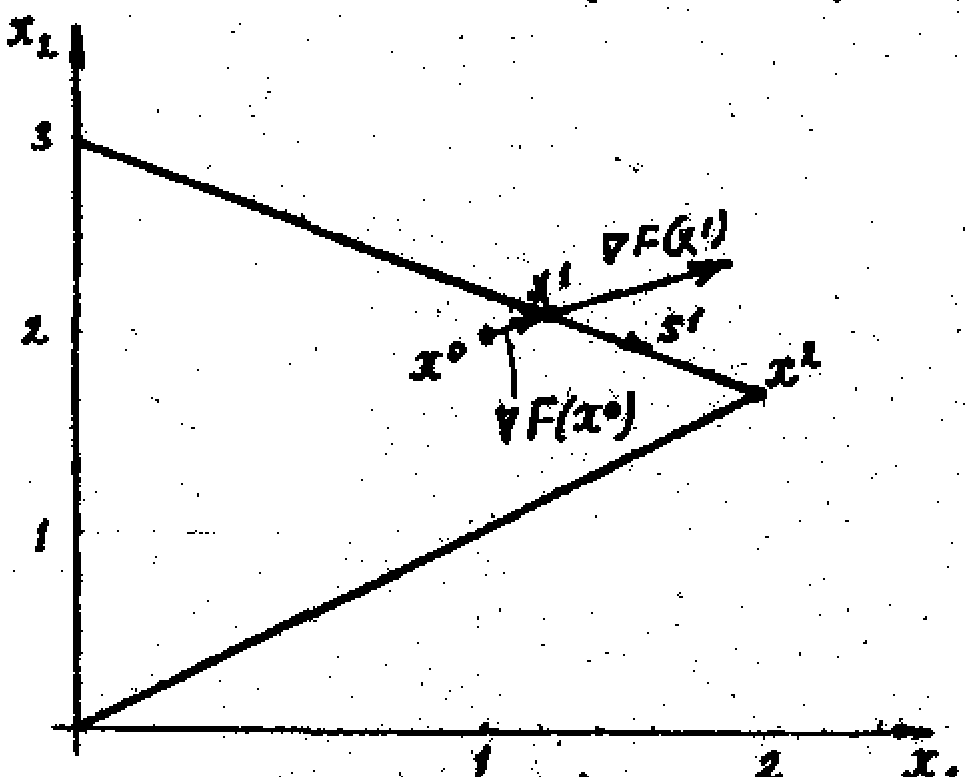


Рис. 4.1

$$max \left\{ \nabla F^T(x^K) \cdot s^K \;\middle|\; a_j^T s^K \le 0,\ \|s^K\| \le 1 \right\} .$$

Найдем направление S^1 очередного шага.

Условие $a_j^T s^K \le 0$ запишется следующим образом:

$$[3 \quad 4] \begin{bmatrix} s_1^1 \\ s_2^1 \end{bmatrix} = 3 s_1^1 + 4 s_2^1 = 0, \qquad (3.1)$$

где a_j^T – коэффициенты второго ограничения.

Выражение (3.1) записано в виде равенства, так как x^1 лежит на прямой $3x_1 + 4x_2 = 12$. Из (3.1) следует

$$S_2^1 = -\frac{3}{4} S_1^1 .$$

$$\| s^1 \| = \sqrt{(S_1^1)^2 + (S_2^1)^2} = \sqrt{(S_1^1)^2 + \frac{9}{16}(S_1^1)^2} = 1$$

Условие нормировки дает

$$\frac{5}{4} S_1^1 = 1; \quad S_1^1 = 0{,}8; \quad S_2^1 = -0{,}6,$$

т.е. $\max \nabla F^T(x^1) \cdot s^1$ достигается при $S_1^1 = 0{,}8$; $S_2^1 = -0{,}6$.

При движении из точки x^1 в направлении s^1 будем двигаться по граничной прямой, как показано на рис. 4.1.

6. Переходим в точку $x^2 = x^1 + \alpha^1 s^1$.

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1852 \\ 2{,}1111 \end{bmatrix} + \alpha^1 \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1852 + 0{,}8\alpha^1 \\ 2{,}1111 - 0{,}6\alpha^1 \end{bmatrix}$$

Для определения координат точки x^2 рассмотрим систему ограничений

$$\begin{cases} (1{,}1852 + 0{,}8\alpha^1) - (2{,}1111 - 0{,}6\alpha^1) \le 0 \\ 1{,}1852 + 0{,}8\alpha^1 \ge 0 \\ 2{,}1111 - 0{,}6\alpha^1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^1 \le 0{,}6614 \\ \alpha^1 \ge -1{,}4815 \\ \alpha^1 \le 3{,}5125 \end{cases}$$

Второе ограничение опустим, так как точка x^2 лежит на граничной прямой

$$-1{,}4815 \le \alpha^1 \le 0{,}6614 .$$

7. Найдем α^1, которое обеспечит максимум F(x) в направлении s^1. Для этого подставим координаты точки x^2 в F(x)

$$F(\alpha^1) = 20{,}1577 + 1{,}7629\alpha^1 - 1{,}16(\alpha^1)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 1{,}7629 - 2{,}32\alpha^1 = 0, \quad \alpha^1 = 0{,}7599$$

Это значение α^1 не принадлежит найденному интервалу, поэтому принимаем $\alpha^1 = 0{,}6614$ (верхняя граница интервала).

Тогда

$$x_1^2 = 1{,}7143,\quad x_2^2 = 1{,}7143;\quad \nabla F(x^2) = [2{,}4285;\ 2{,}8572].$$

8. Точка x^2 принадлежит двум прямым, определяемым ограничениями задачи, поэтому условия $a_j^T S^2 \le 0$ запишутся следующим образом:

$$[3 \quad 4]\begin{bmatrix} S_1^2 \\ S_2^2 \end{bmatrix} = 3S_1^2 + 4S_2^2 = 0,$$

$$[1 \quad -1]\begin{bmatrix} S_1^2 \\ S_2^2 \end{bmatrix} = S_1^2 - S_2^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $S_1^2 = 0$ и $S_2^2 = 0$, т.е. нет такого нового направления, которое привело бы к увеличению $F(x)$, следовательно, точка x^2 является точкой максимума $F(x)$.

$$F(x)_{max} = 20{,}8163.$$