

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ С  
СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

## Цель работы

Экспериментальное исследование переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами при включении или отключении источника напряжения. Определение влияния отдельных параметров на характер переходного процесса.

Выбор параметров и экспериментальное исследование дифференцирующих и интегрирующих цепей.

## Основные теоретические положения

## А. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В электрических цепях, содержащих накопители энергии, при включении и выключении пассивных или активных ветвей, коротких замыканиях отдельных участков, внезапных изменениях параметров и других коммутациях возникают переходные режимы.

Теоретически можно считать, что процесс коммутации происходит мгновенно, т.е. на включение, выключение или переключение цепи время не затрачивается, однако переход от исходного режима цепи к последующему установившемуся происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени. Объясняется это тем, что каждому состоянию цепи соответствует определенный запас энергии электрических и магнитных полей, переход к новому режиму связан с нарастанием или убыванием энергии этих полей. Энергия, запасенная в магнитном поле катушки, и энергия электрического поля емкости

$$W_L = \frac{L i^2}{2}, \quad W_C = \frac{C u^2}{2}$$

не могут изменяться скачком. Действительно, скачкообразное изменение энергии привело бы к выделению в индуктивностях и емкостях бесконечно больших мощностей, что лишено физического смысла.

Отсюда вытекают два закона коммутации:

1. В ветви с индуктивностью ток в момент коммутации сохраняет то значение, которое он имел до коммутации, и изменяется именно с этого значения.

2. В ветви с емкостью напряжение (заряд) сохраняет в момент коммутации то значение, которое было до коммутации, и изменяется

именно с этого значения.

Обычно принимают, что коммутация происходит в момент времени  $t = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} i_L(0_-) &= i_L(0_+) \\ u_C(0_-) &= u_C(0_+) \end{aligned} \quad (13.1)$$

где  $i_L(0_-)$ ,  $u_C(0_-)$  — значения напряжений и тока до коммутации;  
 $i_L(0_+)$ ,  $u_C(0_+)$  — начальные значения после коммутации.

Следует отметить, что скачкообразно могут измениться как токи в сопротивлениях и емкостях, так и напряжения на сопротивлениях и индуктивностях.

Значения токов в индуктивностях и напряжений на емкостях цепи в первый момент после коммутации называются независимыми начальными условиями, так как они определяются из законов коммутации по схеме до включения или выключения ключей. Все остальные токи и напряжения на элементах цепи в первый момент после коммутации определяются из расчета схемы замещения для момента времени  $t = 0$  и называются зависимыми начальными условиями.

Переходные процессы в одних случаях неизбежны и опасны (например, короткое замыкание в энергосистеме), в других случаях они представляют нормальный режим работы цепи (например, в системах автоматического регулирования, вычислительных устройствах, радиопередатчиках системах и т.д.).

Существуют различные методы анализа переходных процессов. В данной работе рассматривается классический метод.

Расчет переходного процесса классическим методом производится в следующем порядке:

1. Рассчитывается режим до коммутации, из которого определяются независимые начальные условия.
2. Составляется система дифференциальных уравнений, описывающая процесс в цепи после коммутации.
3. Находятся общие решения системы однородных дифференциальных уравнений (свободные составляющие).
4. Находятся частные решения системы неоднородных дифференциальных уравнений (установившийся режим).
5. По начальным условиям определяются постоянные интегрирования.

Характер переходного процесса определяется характером свободных составляющих, которые в свою очередь зависят от вида корней характеристического уравнения.

1. Корни вещественные неравные (отрицательные)  $p_1 = -\delta_1$ ,  $p_2 = -\delta_2$  и т.д.

В этом случае

$$i_{cb} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k e^{-\delta_k t} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k e^{-\frac{t}{\tau_k}}$$

Переходный процесс носит аperiodический характер.

Каждая свободная составляющая имеет вид экспоненты (рис. 13.1).  
Время переходного процесса зависит от коэффициента затухания  $\delta$ .  
Величина, обратная  $\delta$ , называется постоянной времени  $\tau$ .

Постоянная времени  $\tau$  представляет собой время, в течение которого значение свободной составляющей переходного процесса уменьшится в  $e = 2,72$  раз. Величина  $\tau$  зависит от схемы и параметров. Так, для цепи с последовательным соединением  $r$  и  $L$   $\tau = \frac{L}{r}$ , а при последовательном соединении  $r$  и  $C$   $\tau = rC$ .

Кривые свободных составляющих переходного процесса проще всего построить, зная времена  $\tau$  значения  $0, \tau, 2\tau$  и т.д. Если вещественных корней несколько, то результирующая кривая получается путем суммирования ординат отдельных слагаемых (рис. 13.2).

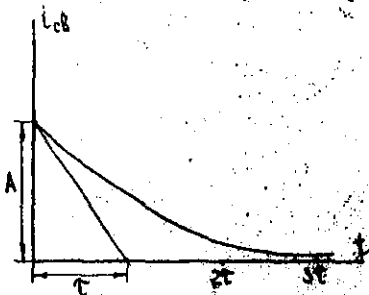


Рис. 13.1

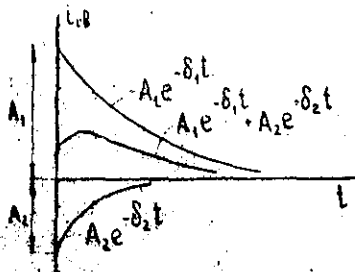


Рис. 13.2

2. Корни равные:

$$p_1 = p_2 = p, \tau = \frac{1}{\delta}; i_{cb} = (A_1 + A_2 t) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3. Корни комплексно-сопряженные:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_c; i_{cb} = (A_1 \sin \omega_c t + A_2 \cos \omega_c t) e^{-\frac{t}{\tau}} = A e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_c t + \psi)$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}; \psi = \arctg \frac{A_1}{A_2}; \tau = \frac{1}{\delta}$$

Характер переходного процесса — колебательный. Свободная составляющая имеет вид затухающей синусоиды с начальной фазой  $\psi$ . Огибающая колебаний определяется кривой  $Ae^{-t/\tau}$ . Чем больше  $\delta$ , тем быстрее затухает колебательный процесс. Период свободных колебаний  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$  определяется коэффициентом  $\omega_c$  при мнимой части корня и зависит от параметров цепи после коммутации. Колебательные процессы могут возникать в схемах, содержащих емкости и индуктивности, имеющих малые активные сопротивления. Построить кривую колебательного переходного процесса удобно, рассчитав сначала точки огибающей экспоненты, затем определить период  $T_c$  и в экспоненту и ее зеркальное отражение вписать синусоиду, сдвинув ее на соответствующий угол относительно начала координат (рис. 13.3).

При наличии корней разного вида соответствующие выражения суммируются. Например, один корень вещественный  $p_1 = -\delta_1$  и два корня комплексно-сопряженные  $p_{2,3} = -\delta_2 \pm j\omega_c$  и два корня

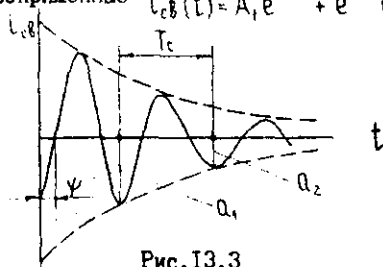


Рис. 13.3

Скорость затухания рассматриваемых колебаний принято оценивать декрементом или логарифмическим декрементом колебаний.

Декрементом колебаний  $\Delta$  называется отношение двух амплитудных значений напряжений или токов в моменты времени  $t$  и  $t + T_c$ , а логарифмическим декрементом колебаний — натуральный логарифм этого отношения, т.е. декремент колебаний  $\Delta = \frac{a_1}{a_2} = e^{\delta T_c}$ , а логарифмический декремент колебаний

$$\theta = \ln \frac{a_1}{a_2} = \delta T_c \quad (13.2)$$

### Б. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩАЯ ЦЕПЬ

Дифференцирующей называется электрическая цепь, в которой выходная величина пропорциональна производной от входной величины.

Простейшими дифференцирующими цепями могут служить цепи с емкостью или индуктивностью.

В цепи с емкостью

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

Принимая  $u_c(t)$  за входную величину, а ток  $i_c(t)$  за выходную, получают дифференцирующую цепь.

В цепи с индуктивностью

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Принимая  $i_L(t)$  за входную величину, а  $u_L(t)$  за выходную, получают дифференцирующую цепь.

Использовать ток как входную или выходную величину практически затруднительно, так как в первом случае необходимо иметь стабильный источник тока, а во втором для его измерения необходимо включить последовательно дополнительное сопротивление, которое оказывает влияние на процесс. Следовательно, входной и выходной величинами целесообразно выбирать напряжения. При этом используются  $rC$  и  $rL$  цепи (рис. I3.4 а и б).

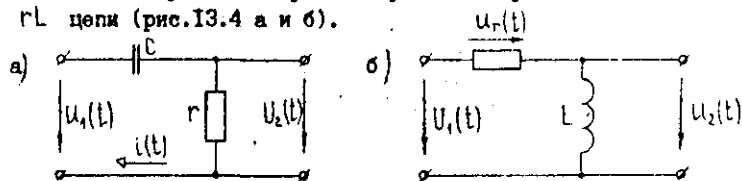


Рис. I3.4

На практике широкое применение получила  $rC$  - цепь.

Условие, при котором  $rC$  - цепь выполняет операцию дифференцирования, вытекает из уравнения

$$u_1(t) = u_c(t) + u_r(t).$$

Если принять

$$u_r(t) \ll u_c(t), \quad (I3.3)$$

то

$$u_c(t) \approx u_1(t).$$

При синусоидальном входном напряжении уравнение цепи в комплексной форме

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_c + r\dot{i} = (r + \frac{1}{j\omega C})\dot{i}$$

По условию дифференцирования

$$r\dot{i} \ll \frac{1}{j\omega C}\dot{i},$$

$$\text{тогда} \quad r \ll \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad rC \ll \frac{1}{\omega} \quad (I3.4)$$

При несинусоидальной форме напряжения  $u_1(t)$  условие дифференцирования должно быть выполнено для всех гармонических составля-

щих входного сигнала. При этом условием дифференцирования является

$$RC \ll \frac{1}{\omega_1}$$

где  $\omega_1$  — частота наивысшей гармоники, которой нельзя пренебречь.

Например, кривая напряжения прямоугольной формы определяется рядом

$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \left[ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right] \quad (13.5)$$

Наивысшей расчетной частотой обычно полагают частоту II-той гармоники. Поэтому

$$RC = \frac{1}{11\omega} \quad (13.6)$$

Идеальное дифференцирование прямоугольного импульса показано на рис.13.5, а, б. Амплитуда выходного сигнала  $u_2(t)$  бесконечно велика.

График напряжения  $u_2(t)$  на выходе реальной дифференцирующей цепи показан на рис.13.6, б. Напряжение  $u_2(t)$  представляет собой импульсы экспоненциальной формы с чередующейся полярностью. За длительность выходного импульса принимают время, равное утроенному значению постоянной времени цепи  $t_n \approx 3\tau$ . (13.7)

Амплитуда импульсов равна значению входного напряжения.

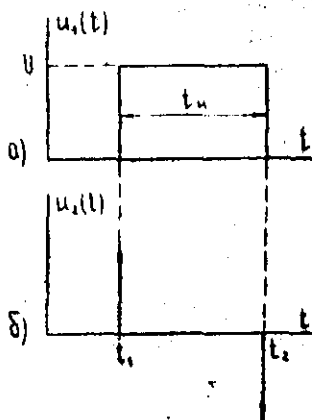


Рис.13.5

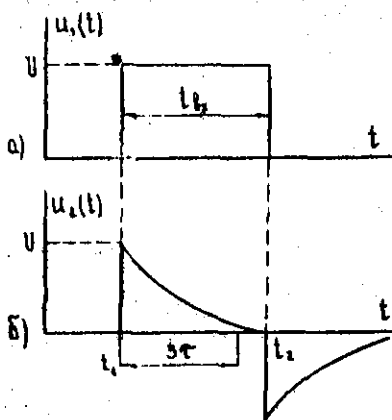


Рис.13.6

Сравнение временных диаграмм реальной и идеальной дифференцирующей цепи (рис.13.5, б и 13.6, б) показывает, что при уменьшении  $\tau$  длительность импульсов  $u_2(t)$  сокращается и кривая  $u_2(t)$  становится по форме и провалом входного напряжения.

Эта цепь называется еще укорачивающей, так как длительность выходных импульсов значительно меньше, чем входных.

### В. ИНТЕГРИРУЮЩАЯ ЦЕПЬ

Интегрирующей называется электрическая цепь, в которой выходная величина пропорциональна интегралу от входной величины (рис. 13.7).

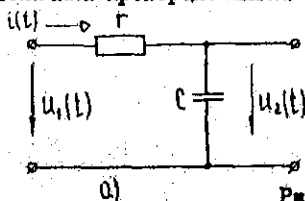
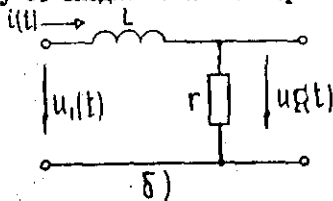


Рис. 13.7



Широкое применение на практике получила интегрирующая  $RC$ -цепь. Напряжение на выходе

$$u_2 = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Если напряжение на емкости составляет малую часть от напряжения на сопротивлении, то ток  $i(t)$  в цепи будет пропорционален входному напряжению:

$$i(t) \approx \frac{u_1(t)}{r},$$

следовательно,

$$u_2(t) = u_c \approx \frac{1}{rC} \int u_1 dt \quad (13.8)$$

Итак, при выполнении условия

$$u_c \ll u_r \quad \text{или} \quad u_c \approx u_r \quad (13.9)$$

цепь  $RC$  является интегрирующей.

Условие (13.9) для гармонического сигнала с частотой  $\omega$  можно записать

$$\frac{1}{\omega C} \ll r; \quad \frac{1}{\omega} \ll rC = \tau.$$

На практике принимается  $C \geq \frac{10}{\omega r}$  (13.10)

При несинусоидальном сигнале условие (13.10) должно выполняться для гармонической составляющей наименьшей частоты  $\omega_n$ , т.е. частоты повторения входного сигнала.

В качестве примера рассматривается выходное напряжение интегрирующей  $RC$ -цепи при воздействии на вход прямоугольного импульса (рис. 13.8, а).

Выходное напряжение на емкости в интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$  изменяется по закону

$$u_2(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

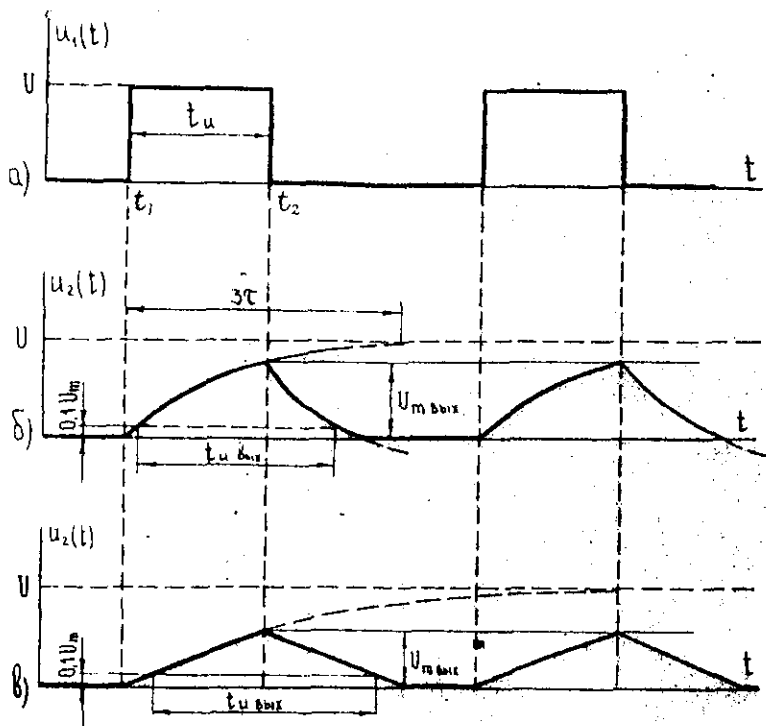


Рис.13.8

Максимальное напряжение на выходе

$$U_{\text{max}} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

При условии, что постоянная времени  $\tau$  цепи больше длительности входного импульса, выходное напряжение на участке  $t_1 \dots t_2$  меняется почти по линейному закону, т.е. выходное напряжение является интегралом входного напряжения прямоугольной формы.

Следует отметить, что чем больше  $\tau$ , тем точнее выполняется операция интегрирования (закон линейности), но выходное напряжение по величине значительно меньше входного (рис.13.8, в).

Время  $t_{\text{вых}}$  измеряется на уровне  $0,1 U_{\text{max}}$ , как это показано на рис.13.8, б и в. Эта цепь называется еще удлинителем, потому что для-



тельность импульса на выходе получается больше длительности входного импульса.

### Домашнее задание

1. Изучить классический метод расчета переходных процессов в сложных электрических цепях.
2. Определить классическим методом ток в заданной цепи и напряжение на емкости при заряде конденсатора (схема на рис. 13.9).

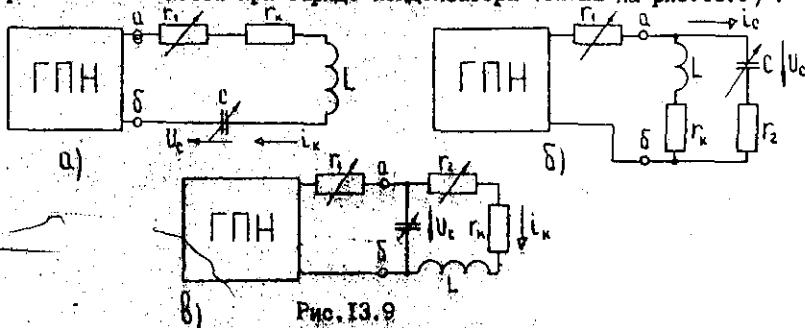


Рис. 13.9

В качестве источника э.д.с. в исследуемых цепях используется генератор прямоугольного напряжения (ГПН). Действие прямоугольного напряжения с амплитудой 10 В на нагрузку при длительности импульса, превышающей постоянную времени цепи, эквивалентно подключению цепи к источнику с постоянной э.д.с.  $E = 10$  В.

Параметры схемы и определяемые величины даны в табл. 13.1 в соответствии с номером варианта.

Таблица 13.1

Вариант	Схема	Исходные данные					Определяемые величины			
		$R_1$	$R_2$	$C$	$R_k$	$L$				
		Ом	Ом	мкФ	Ом	Г	A	B	c	c
1	а	100	0	1,0	100	0,14	$i_L(t)$	$u_C(t)$	$\tau$	$\tau = \frac{L}{R_{\Sigma}}$
2	б	5000	30	0,25	100	0,14	$i_C(t)$	$u_C(t)$		
3	в	5000	30	0,25	100	0,14	$i_L(t)$	$u_C(t)$		
4	а	100	0	0,25	100	0,14	$i_L(t)$	$u_C(t)$		
5	б	5000	30	0,5	100	0,14	$i_C(t)$	$u_C(t)$		
6	в	5000	30	1,0	100	0,14	$i_L(t)$	$u_C(t)$		

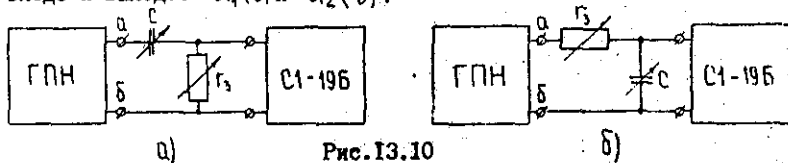
3. Построить графики  $i(t)$  и  $u_C(t)$ .

4. Определить декремент и логарифмический декремент затухания,

а также частоту собственных колебаний.

5. Рассчитать сопротивление  $R = R_3$  (рис. 13.10, а) и постоянную времени  $\tau$  дифференцирующей цепи по формуле (13.6) в случае подачи на вход прямоугольного импульса длительностью 0,01 с с амплитудой 10 В при частоте повторения  $f = 50$  Гц и емкости  $C = 0,5$  мкФ. Построить временные диаграммы напряжений на входе и выходе цепи.

6. Рассчитать емкость  $C$  (рис. 13.10, б) и постоянную времени  $\tau$  по формуле (13.10), при которой  $RC$ -цепь является интегрирующей. На вход цепи поступает прямоугольный импульс длительностью 0,01 с с амплитудой 10 В при частоте повторения  $f = 50$  Гц и сопротивлении  $R_3 = 5800$  Ом. Построить временные диаграммы напряжений на входе и выходе:  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ .



#### Пояснения к лабораторной работе

В настоящей лабораторной работе исследуются переходные процессы при включении и переключении цепи одной из схем, представленных на рис. 13.9, а также формы сигналов на выходе дифференцирующей и интегрирующей цепей.

В качестве источника э.д.с. в исследуемых цепях используется генератор прямоугольных напряжений (ГПН), собранный на полупроводниковых триодах.

ГПН установлен на стенде, питание его осуществляется от постоянного напряжения 10 В и переменного напряжения 220 В. Для получения напряжения от ГПН необходимо включить тумблеры "выкл" и "В".

Частота выходного напряжения ГПН  $f = 50$  Гц.

#### Последовательность выполнения лабораторной работы

1. Ознакомиться с рабочей инструкцией к осциллографу С1-19Б.
2. Включить осциллограф и подготовить его к работе.
3. Включить ГПН и зарисовать с экрана осциллографа форму кривой напряжения на клеммах "нагрузка". Определить амплитуду и длительность импульсов с помощью калибратора осциллографа (см. рабо-

чую инструкцию к осциллографу CI-196).

4. Собрать схему заданного варианта, подключив ее к клеммам "нагрузка" ГПН. Зарисовать с экрана осциллографа кривую формы тока  $i(t)$  и напряжения на конденсаторе  $U_c(t)$ , заданные в домашнем задании (кривая тока снимается с активного сопротивления).

5. Измерить в мм по масштабной сетке осциллографа величину 2-х соседних амплитуд  $A_1$  и  $A_2$  затухающих колебаний напряжения на конденсаторе  $U_c(t)$  (рис.13.3).

6. Определить длительность периода  $T_c$  собственных колебаний  $U_c(t)$ . Для этого оставить на экране осциллографа примерно один период собственных колебаний, увеличить размер изображения с помощью ручек управления осциллографа. Подсчитать количество меток, укладывающихся в данный период.  $T_c$  определяется произведением количества меток в периоде на масштаб одной метки, установленный на калибраторе времени осциллографа.

7. Вычислить частоту собственных колебаний по формуле  $f_c = \frac{1}{T_c}$  и логарифмический декремент затухания  $\theta$  по формуле (13.2) и сравнить с рассчитанными в домашнем задании.

8. Изменяя  $r$  и  $C$ , выяснить влияние этих параметров на переходный процесс, т.е. на  $T$ ,  $T_c$ .

9. Собрать дифференцирующую цепь с емкостью  $C = 0,5$  мкФ и сопротивлением  $r = r_3$ , полученным в домашнем задании, подключить к источнику (рис.13.10,а). Срисовать форму выходного напряжения, определить амплитуду, длительность импульса и постоянную времени.

10. Проанализировать влияние  $r_3$  и  $C$  на форму выходного напряжения, для этого при  $C = 0,5$  мкФ установить  $r_3 = 10 r_3$ . Срисовать форму выходного напряжения, определить амплитуду, длительность импульса и постоянную времени  $T$ . Сравнить с формой выходного напряжения, полученного по п.9.

11. Собрать интегрирующую цепь (рис.13.10,б) с сопротивлением  $r = 5000$  Ом и емкостью  $C$ , полученными в домашнем задании. Срисовать форму выходного напряжения, определить амплитуду, длительность импульса и постоянную времени  $T$ .

12. Проанализировать влияние параметров интегрирующей цепи на форму выходного напряжения. Установить  $C = 0,5$  мкФ и сопротивление  $r_3 = 5000$  Ом. Срисовать форму выходного напряжения. Определить параметры выходного напряжения и сравнить с формой выходного напряжения, полученного по п.11.